

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE
DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPECIALITE

(Troisième cycle de mécanique des solides)

par

Jean-Louis FAVRE

SUJET

**Pour un traitement par le calcul
de probabilités statistiques des
problèmes de mécanique des sols**

Soutenue le 4 Février 1972, devant la Commission d'Examen

M. KRAVTCHENKO

Président

M. ANGLES D'AURIAC

M. BIAREZ

Examineurs

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE
DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPECIALITÉ

(Troisième cycle de mécanique des solides)

par

Jean-Louis FAVRE

SUJET

**Pour un traitement par le calcul
de probabilités statistiques des
problèmes de mécanique des sols**

Soutenue le 4 Février 1972, devant la Commission d'Examen

M. KRAVTCHENKO

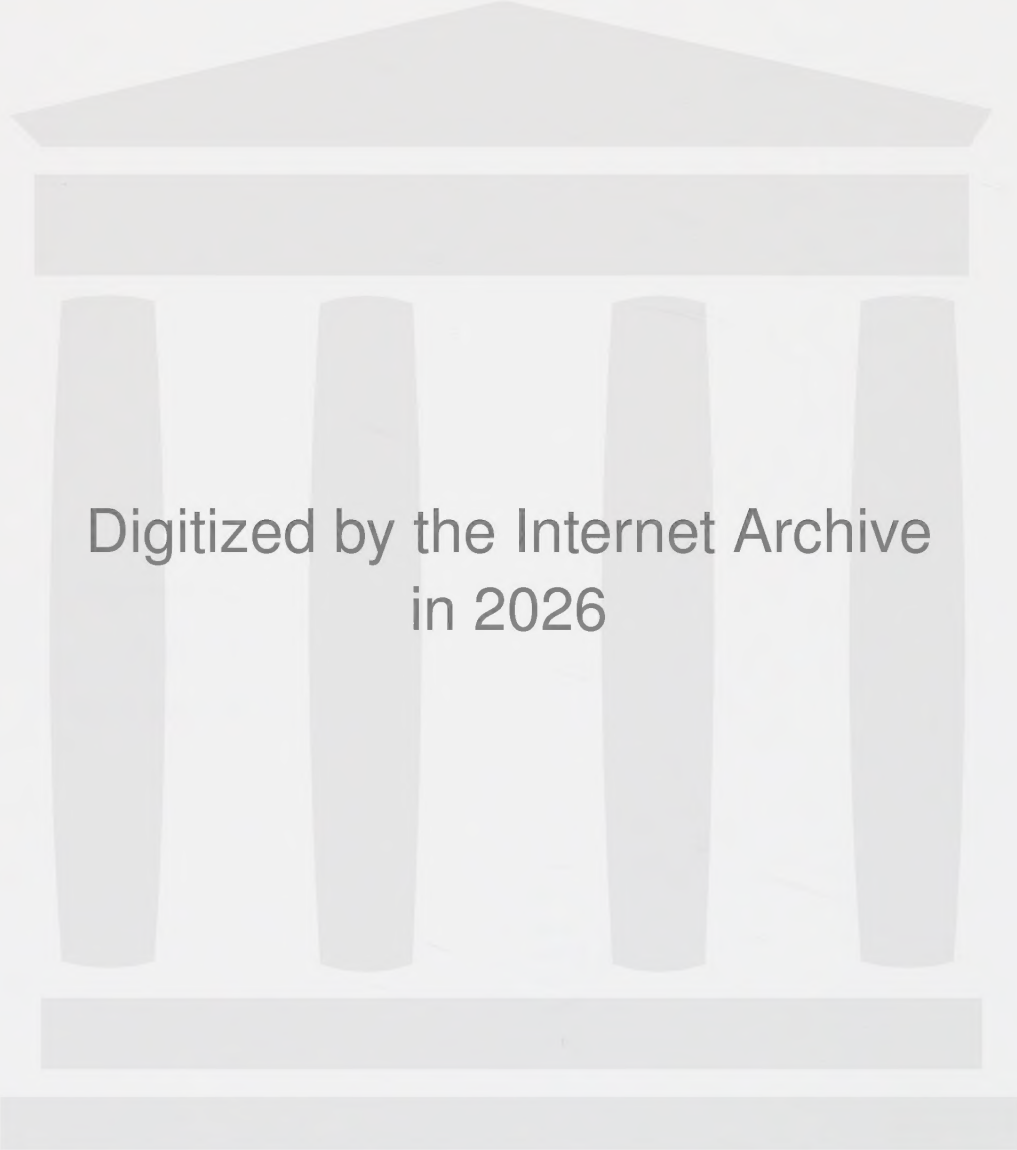
Président

M. ANGLES D'AURIAC

M. BIAREZ

Examineurs

à la mémoire de
mon père
ingénieur I. E. G.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544304_0003

REMERCIEMENTS

Cette étude a été effectuée au Laboratoire de Mécanique des Solides des Fluides et des Sols, Institut de Mécanique de GRENOBLE - Section Mécanique des Sols.

Je remercie tout le personnel du laboratoire, employés, techniciens, chercheurs et professeurs qui donnent à celui-ci l'ambiance et les moyens nécessaires à la recherche.

Je remercierai plus particulièrement tous ceux sans lesquels je n'aurais pu effectuer et présenter cette étude, MM. ADRIEN, ANGLES D'AURIAC, BIAREZ, BIGUENET, BRAULT, DAYRE, ELBERG, LAGARDE, LESPINARD, RABATEL.

Je remercie mes professeurs de DEA qui m'ont donné les bases nécessaires à la recherche en mécanique des sols.

A Monsieur KRAVTCHENKO qui a accepté de présider ce jury, j'exprime ma gratitude et ma considération.

A Monsieur ANGLES D'AURIAC qui a tenu à critiquer ma façon de concevoir l'utilisation du calcul de Probabilités-Statistiques, j'exprime mon estime et ma reconnaissance.

A Monsieur BIAREZ qui m'a fait comprendre l'importance du problème traité, m'a guidé par de nombreuses discussions, et à qui je dois mes connaissances des problèmes appliqués de la mécanique des sols, j'exprime ma considération et vifs remerciements.

J'ai poursuivi cette étude en collaboration étroite avec Monsieur BIGUENET. Sa participation a été décisive à l'élaboration de ce travail.

Enfin, j'ai trouvé en Monsieur PHAM-DINH-TUAN de l'Institut de Mathématique Appliquée de Grenoble, une haute compétence en Probabilités-Statistiques. Je souhaite que nos relations se multiplient et soient un pas de plus vers la collaboration entre scientifiques de branches différentes.

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	1
1ère Partie - LA METHODE	7
1er Chapitre : <u>Quelques éléments de probabilités-statistiques</u>	9
I.I - <u>Statistique descriptive</u>	9
I.I.1 Généralités et définitions	9
I.I.2 Distribution à un seul caractère	10
I.I.3 Distribution à 2 caractères	15
I.I.4 Fonctions multivariantes	22
I.II- <u>Calcul de Probabilités</u>	24
I.II.1 Evènements aléatoires et probabilités	24
I.II.2 Les épreuves multiples	26
I.III- <u>Théorie de l'échantillonnage</u>	29
I.III.1 Notion de convergence et d'estimation en probabilités	29
I.III.2 Distributions déduites de la loi de Gauss	30
I.III.3 Erreurs d'échantillonnage - Limites de confiance	32
I.IV- <u>Tests statistiques ou tests d'hypothèses</u>	34
I.IV.1 Définitions	34
I.IV.2 Tests de dispersion	35
I.IV.3 Contrôles par prélèvement	36
2ème Chapitre : <u>Les différentes applications en Mécanique des Sols</u>	39
II.I - <u>Les différents types de données</u>	39
II.I.1 Lois rhéologiques	39
II.I.2 Forces de volumes	40
II.I.3 Les conditions aux limites	41

II.II-	<u>Les idées de recherches - Champ d'application des probabilités-statistiques</u>	42
II.II.1	Dispersion des données	42
II.II.2	Etude du matériau "sol" - Correlations	44
II.II.3	Influence de la dispersion des données sur les résultats de calcul	74
II.II.4	Rationalisation de la reconnaissance	87
2ème Partie	- LES DONNEES	89
3ème Chapitre :	<u>Fichier "lois rhéologiques" - paramètres physiques</u>	91
III.I	<u>Choix des données</u>	91
III.I.1	Lois rhéologiques	91
III.I.2	Paramètres physiques	94
III.I.3	Données qualitatives	95
III.II-	<u>Le Fichier</u>	96
III.II.1	Les contingences techniques	96
III.II.2	Les données	97
4ème Chapitre :	<u>Fichier "zones homogènes - conditions aux limites</u>	103
IV.I	<u>Choix des données</u>	103
IV.I.1	Géométrie des zones	104
IV.I.2	Tests aux limites	105
IV.II-	<u>Le Fichier</u>	105
5ème Chapitre :	<u>Livret de dépouillement et feuilles de résultats</u>	109
3ème Partie	- UTILISATION DES FICHIERS	143

6ème Chapitre : <u>Etude d'un paramètre particulier : la granulométrie</u>	145
VI.I - <u>Techniques mathématiques - les courbes splines</u>	145
VI.I.1 Choix des fonctions splines	145
VI.I.2 La fonction spline	146
VI.I.3 La fonction spline d'ordre 2	147
VI.I.4 Application au tracé des courbes granulométriques	149
VI.II- <u>Application du calcul statistique à l'étude de la granulométrie</u>	153
VI.II.1 Courbe de distribution	153
VI.II.2 Comparaison avec une distribution théorique	155
VI.II.3 Comparaison de $E(x)$ et $\sigma(x)$ avec les paramètres usuels de la granulométrie	157
7ème Chapitre : <u>Etude d'une loi de comportement particulier : la consolidation</u>	161
VII.I - <u>Matériel mathématique</u>	161
VII.II- <u>Etude de la courbe</u>	162
VII.II.1 Les principaux résultats de M. Biarez	162
VII.II.2 Etude de 47 essais oedométriques	163
8ème Chapitre : <u>Essai de cartographie du Site de Grenoble</u>	183
VIII.I - <u>Cadre général de l'étude</u>	183
VIII.II- <u>Traitement du Fichier "zones homogènes"</u>	185
VIII.II.1 Recherche de la situation des couches en tout point	185
VIII.II.2 Estimation des caractéristiques et propriétés d'un sol	198
4ème Partie - RECHERCHES ANALOGUES EFFECTUEES	199
<u>Recherches effectuées au Laboratoire</u>	201

<u>Quelques travaux exécutés hors de l'IMG</u>	219
Annexe 1 - Principaux symboles et relations	I
Annexe 2 - Tables des lois statistiques	XIII
Annexe 3 - Quelques programmes Fortran de traitements	XXXIV
 BIBLIOGRAPHIE	 XLV

I N T R O D U C T I O N

Si la Mécanique des Sols a vu naître ses premières lois aux XVIII^e et XIX^e siècles, elle s'est, contrairement aux autres sciences, développée bien plus lentement. A l'heure actuelle certains problèmes ne peuvent être résolus avec une erreur inférieure à 100% ou 200%. Ce retard provient de la complexité du matériau où les hypothèses simples sont rarement valables ; les problèmes sont, en outre, à 3 dimensions, mais surtout l'hétérogénéité est le trait particulier du matériau étudié, hétérogénéité et souvent anisotropie.

Le grand nombre et la complexité des lois de comportement, des modes de reconnaissance, des essais en place, des essais en laboratoire, montrent bien que la mécanique des sols n'est pas tout à fait dégagée de l'empirisme, et que nous n'avons pas encore une connaissance rationnelle des phénomènes.

La synthèse des différentes méthodes, la rationalisation de la prospection, la caractérisation d'un sol par des paramètres moins nombreux et plus simples, en un mot la meilleure connaissance du matériau en vue de résoudre les problèmes pratiques du Génie Civil et de la Construction, tel est le but de tout chercheur.

A l'heure actuelle, grâce à l'utilisation de l'ordinateur, des méthodes nouvelles de calcul numérique, ce travail devient envisageable à une échelle plus large, englobant plus de problèmes, plus de données, et un des instruments pour traiter un grand nombre de renseignements est le calcul de Probabilités-Statistiques.

Il nous faut tout de suite avertir le lecteur, que nous ne prétendons nullement par l'utilisation des probabilités statistiques arriver à des résultats extraordinaires ; de toute façon, ces travaux nous semblent considérables, car ils nécessitent une vue d'ensemble de la mécanique des sols et la connaissance précise de chaque problème. Ils ne sauraient être entrepris par une seule personne et même par une seule équipe. Notre prétention se limite, dans l'état actuel de nos capacités, à dégager un certain nombre de directions de recherches afin de tester la puissance

éventuelle de l'outil "Calcul de Probabilités Statistiques".

---°---

Il faut absolument détruire l'idée que l'on pourrait faire des probabilités statistiques en mécanique des sols, sans être mécanicien des sols - un outil est un outil, l'important est de savoir comment on s'en sert.

Le mécanicien pour résoudre un problème doit connaître 3 choses :

- Les lois générales du phénomène à l'échelle où il se place (macroscopique, microscopique, atomique, électronique). A l'échelle macroscopique, ce sont les lois fondamentales de la mécanique d'équilibre des forces.
- Les lois de comportement du matériau objet de l'étude; ces lois sont attachées au matériau lui-même dans des conditions déterminées - ce sont les relations entre contraintes et déformations et leurs dérivées $f(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \epsilon, \dot{\epsilon}, \ddot{\epsilon}, \dots)$.
- Les conditions aux limites du matériau, c'est-à-dire les causes, les agents extérieurs qui provoquent le phénomène.

Causes extérieures qui provoquent le phénomène, lois qui régissent ce phénomène, équilibre général des forces et des moments , conservation de l'énergie, etc... donnent une solution particulière du problème.

Si nous voulons faire une utilisation des probabilités statistiques en mécanique des sols, c'est dans le but de mieux connaître ces 3 éléments constitutifs de la solution d'un problème.

Les lois de comportement

A côté de schémas mathématiques - élasticité, plasticité, viscoélasticité, théorie de la consolidation - qui demandent pour leur application des simplifications parfois grossières et dont l'emploi, qui se heurtait à des problèmes de longueur et lourdeur de calcul, se trouve revalorisé par les méthodes modernes de calcul numérique et l'utilisation de l'ordinateur, les mécaniciens des sols se sont forgés un grand nombre de méthodes de calcul approché ou semi-empiriques qu'ils utilisent pour un problème bien particulier.

Ces lois particulières sont en fait des lois statistiques, élaborées à partir d'un grand nombre d'observations, et se basant sur des hypothèses données mais que la pratique a pu vérifier. Malheureusement, le champ d'application de ces lois n'est donné que qualitativement, et le chercheur doit, pour avoir une vue d'ensemble de ce que l'on doit appeler une technologie du sol appliquée à différents problèmes, fournir un effort de dépouillement bibliographique assez considérable.

Il est difficile aussi de connaître la confiance que l'on doit accorder à telle ou telle méthode pour traiter une question ; aussi l'ingénieur affectera ses calculs d'un facteur multiplicatif arbitraire, c'est-à-dire englobant tous les cas, et non à la mesure de chacun d'eux.

Le choix des paramètres de ces lois et de la mesure de ces paramètres est aussi une source de difficultés ; d'abord parce que ces paramètres sont mesurés dans des conditions aux limites particulières suivant un certain chemin dans l'espace temps des contraintes ou déformations.

Ensuite parce que la méconnaissance du matériau a conduit à multiplier les paramètres des lois avec la multiplication de celles-ci et à chercher à les appréhender par des paramètres physiques, plus commodes à mesurer. Mais, signalons tout de suite que certaines caractéristiques, comme la granulométrie n'ont pas de représentation simple.

Une dernière source de difficultés est de savoir à partir de quoi on va mesurer ces caractéristiques.

La prise d'échantillons, les modes de reconnaissances des sols en place échappent à toute méthode systématique, d'autant plus que les propriétés recherchées varient suivant les problèmes et suivant le choix de la loi de comportement de cette masse, choix fait a priori d'après le bon sens et l'expérience, mais hors de tout critère quantitatif.

D'une part, il existe toute une technologie des essais en place qui s'appuie sur des lois "statistiques" élaborées à partir d'un grand nombre d'observations et qui permet de connaître des caractéristiques du sol, comme les essais de plaque, de perméabilité, les essais CBR, de pénétrromètres dynamiques et statiques. Ce dernier exemple est assez caractéristique de la profusion des méthodes de prospection utilisables et de la variété des résultats qui en découlent.

D'autre part, la reconnaissance des sols en place se fait au droit des efforts qui vont être appliqués, sous les pieux, en différents points des semelles, sans que l'on sache précisément si les renseignements seront surabondants ou insuffisants et significatifs de la masse de matériau intéressé.

Cette thèse ne présente pas le traitement de problèmes de mécanique des sols, elle est seulement un travail de réflexion sur les possibilités de traitement et de mise au point technique en vue d'un traitement.

Dans la première partie, "LA METHODE", après la présentation de l'outil mathématique, nous exposons ce qui peut, à notre avis, faire l'objet de recherches. Une fois dégagés deux grands thèmes (Etude du sol lié à l'espace - Etude du sol en lui-même) nous indiquons :

- L'étude de la dispersion des paramètres avec la définition statistique de ces paramètres, de population de sols suivant un paramètre.
- L'étude de corrélation de paramètres, de définition de paramètres qui doit nous conduire à une meilleure connaissance des lois de comportement.
- L'application des probabilités statistiques aux calculs- le lecteur verra dans cette partie une tentative de trouver une probabilité de rupture en partant de valeurs statistiques des paramètres.

Nous voulons souligner dès cette introduction que cette tentative est loin d'avoir été une réussite totale et qu'il faut plus que jamais, dans cette direction de recherche, être mécanicien des sols, et posséder des instruments de probabilité statistique d'assez haut niveau.

- La rationalisation de la reconnaissance des sols. Cette question est signalée sans être approfondie. Elle soulèvera certainement autant de difficultés que la précédente.

Dans la 2ème partie "LES DONNEES", nous présentons la technique des relevées, de stockage des données et les raisons pour lesquelles nous les avons choisies.

Dans la 3ème partie "UTILISATION", nous montrons à partir de 3 exemples : étude d'un paramètre, la granulométrie - étude d'une loi de comportement, la consolidation - étude de zone, technique pour une cartographie du site de Grenoble - les

premières applications et les techniques qu'elles emploient.

Enfin, dans une 4ème partie "TRAVAUX EXECUTES" nous présentons quelques études déjà réalisées dans le même esprit que nous.

Les lecteurs voudront bien nous excuser d'avoir fait mention de si peu de travaux. Nous nous sommes heurtés à des difficultés de bibliographie dues au fait que de nombreuses études statistiques sont incluses dans des travaux particuliers, qu'il n'existe pas de répertoire spécifique à l'emploi des probabilités statistiques en Mécanique des sols et que cet emploi couvre tous les problèmes de Mécanique des Sols.

---°---

Nous utilisons dans notre travail l'ordinateur IMB 1130 de l'Institut de Mécanique de Grenoble, doté en particulier d'une table traçante permettant la sortie de cartes, courbes, graphiques et d'une liaison avec le 360 du Laboratoire de Mathématiques Appliquées pour traiter plus rapidement des calculs, ou très volumineux, ou très longs.

Nos programmes sont écrits en langage Fortran.

---°---

1ère PARTIE

L A M E T H O D E

1er Chapitre

QUELQUES ELEMENTS DE CALCUL DE PROBABILITES STATISTIQUES

I.I - STATISTIQUE DESCRIPTIVE

I.I.1 - Généralités et définitions

La statistique descriptive a pour but de dénombrer un ensemble d'êtres, d'objets ou de faits et de les classer selon un ou plusieurs de leurs caractères communs.

- On désignera par POPULATION cet ensemble d'éléments rassemblés en vue d'en effectuer un classement logique.
- On appellera INDIVIDU chaque élément distinct de cette population.

Un ECHANTILLON sera un ensemble fini d'individus extrait d'une population.

Note très importante : Le terme "échantillon" ne sera utilisé dans toute la suite que dans ce sens.

- Les individus d'une population possèdent un ou plusieurs caractères quantitatifs communs dont l'intensité peut varier d'un individu à l'autre.

Une population peut-être étudiée en fonction d'un ou de plusieurs caractères communs à ses individus.

Ce caractère peut avoir une variation discontinue et donner une distribution discontinue des individus de la population (Ex = Nombre d'enfants d'une famille) ou une variation continue et donner une distribution continue des individus de la population. (Exemple: teneur en eau d'une population de carottes d'argile)

I.I.2 - Distribution à un seul caractère

I.I.2.1 - Distribution de variables continues et discontinues

a) - Variable discontinue

Soient N l'effectif global d'une population.

x la mesure quantitative du caractère commun à chaque individu.

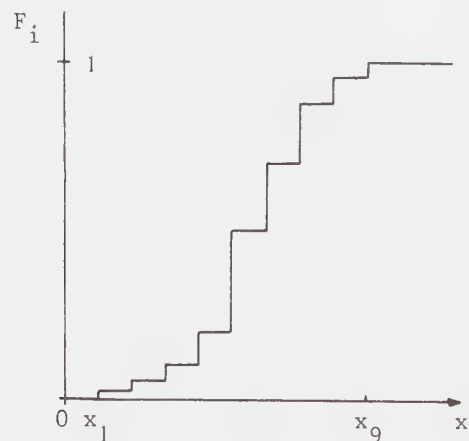
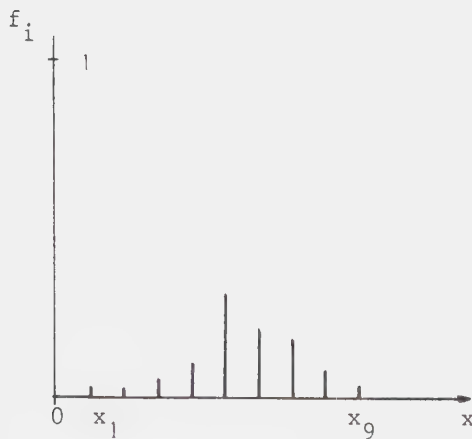
n_i le nombre d'individus de caractère x_i .

On appelle fréquence relative $f_i = \frac{n_i}{N}$ $\sum f_i = 1$

fréquence cumulée $F_i = \sum_1^i f_i$

le graphe $f_i = f_i(x)$ est appelé DIAGRAMME DE DISTRIBUTION

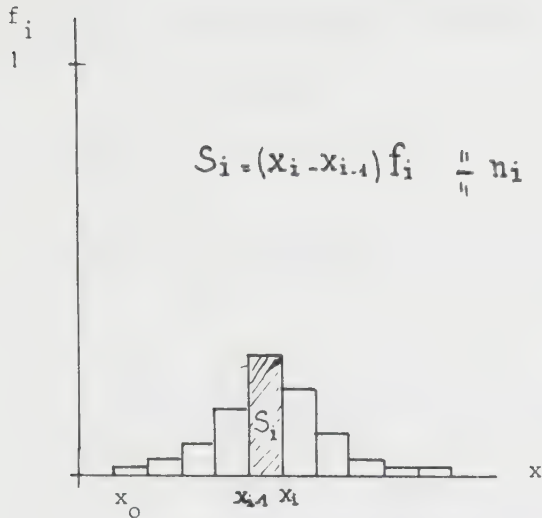
le graphe $F_i = F_i(x)$ est appelé DIAGRAMME DE REPARTITION



b) - Variable continue

Pour étudier la dispersion de la variable on regroupe l'ensemble discret des mesures de cette variable en CLASSES.

Le diagramme de distribution s'appellera alors HISTOGRAMME DE DISTRIBUTION composé à l'aplomb de chaque classe d'un rectangle dont la surface est proportionnelle à la fréquence des individus de la classe correspondante.



Histogramme de distribution

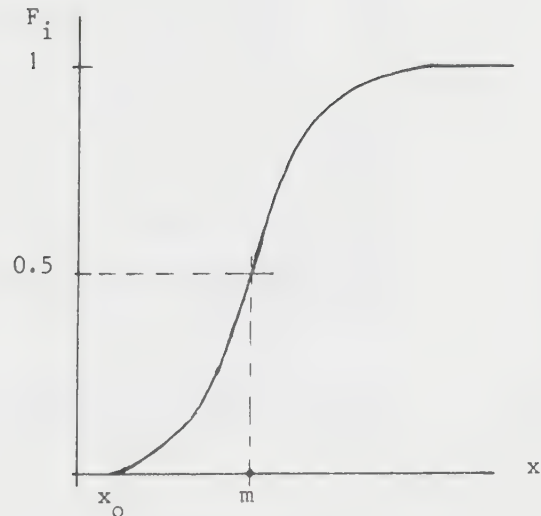


Diagramme de répartition

- Nous n'aurons à étudier que des distributions de variables continues.

I.I.2.2 - Paramètre d'une distribution

a) - Localisation

On utilise l'un ou l'autre des 2 paramètres de POSITION suivants :

- médiane m. c'est la mesure de l'individu qui, dans la suite des individus classés suivant la valeur croissante (ou décroissante) de leur caractère commun, occupe le milieu de la suite.

C'est aussi l'abscisse du point d'ordonnée 0.5 sur le diagramme de répartition.

- moyenne arithmétique $\bar{x}$
elle est définie par $\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \sum f_i x_i$

b) - Étalement

On peut utiliser plusieurs paramètres d'ÉTALEMENTS.

Définissons d'abord l'écart à la moyenne : $e_i = x_i - \bar{x}$ $\sum f_i e_i = 0$

- paramètre d'étendue
différence entre 2 valeurs de la variable.

Première et dernière valeur, valeurs à 10 % et 90 % de la suite (Déciles), à 25 % et 75 % de la suite (quartiles).

- Paramètre d'écart

écart absolu moyen $|e| = f_i |e_i|$ il n'est pas utilisé en raison de la définition non analytique et de ses lois d'échantillonnages complexes ou inconnues.

$$\text{écart quadratique moyen ou écart type } s = \sqrt{\frac{\sum x_i e_i^2}{N}} = \sqrt{\sum f_i e_i^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

$$s^2 \text{ peut s'écrire } s^2 = \frac{1}{N} \left\{ \sum n_i x_i^2 - \frac{1}{N} (\sum n_i x_i)^2 \right\} = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

I.I.2.3 - Modèle mathématique d'une distribution

Il s'agit de représenter la fonction de répartition $F(x)$ par une expression mathématique ne dépendant que d'un petit nombre de paramètres.

Le nombre d'individus compris entre a et b sera alors $\Delta F = F(b) - F(a)$.

a) - Si la variable x est continue et $F(x)$ dérivable entre x et $x + dx$ on aura $dF = F(x + dx) - F(x)$ individus ou $dF = f(x) dx$; $f(x)$ est la DENSITE de la distribution il est de dimension x^{-1} et ne doit pas être confondu avec une fréquence élémentaire adimensionnelle.

On aura :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

NOTA :

Pour une distribution discontinue suivant les entiers positifs on peut associer à chaque entier une fréquence $p(x) = \frac{e^{-\nu} \nu^x}{x!}$ qui définit la distribution de Poisson.

La fonction de répartition sera alors $F(x) = \sum_{Z=0}^{Z=n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^Z}{Z!}$ pour $n < x \leq n+1$

b) - La moyenne arithmétique d'une distribution théorique est appelée
ESPERANCE MATHÉMATIQUE :

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF \qquad E[x] = \sum_x x p(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx$$

son paramètre d'étalement est appelé écart-type-théorique σ

$$\sigma^2 = \sum [x - E[x]]^2 \cdot p(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[x])^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

σ^2 est appelé VARIANCE de x .

c) - Variable centrée, variable réduite, moments

Variable centrée	$\xi = x - E[x]$	$\sigma^2(x) = E[\xi^2]$
Variable réduite	$t = \frac{\xi}{\sigma} = \frac{x - E[x]}{\sigma}$	$E[t] = 0$ $\sigma_t = 1$

t est sans dimension.

On appelle moment d'ordre q $m_q = E[x^q]$

$$m_0 = 1 \qquad m_1 = E[x]$$

On appelle moment centré d'ordre q $M_q = E[\xi^q]$

$$M_0 = 1 \qquad M_1 = 0 \qquad M_2 = \sigma^2$$

Si on effectue le changement de variable $Z = ax + b$ on montre que

$$(z)M_q = a^q (x)M_q \quad \text{en particulier} \quad x = t\sigma + E[x]; \quad (x)M_q = \sigma^q (t)M_q$$

Ces notions sont utilisées dans la recherche des fonctions de répartition théoriques.

I.I.2.4 - Inégalité de Bienaymé - Tchebycheef

Soit une variable x qui a pour fonction de répartition $F(x)$, espérance mathématique $E(x)$ et écart type σ .

On montre que la proportion ΔF d'individu compris dans l'intervalle $-t\sigma$ et $+t\sigma$ autour de $E[x]$ est supérieur ou égal à $1 - \frac{1}{t^2}$ quel que soit la fonction $F(x)$.

On retiendra qu'au moins 75 % de la population est comprise dans l'intervalle

$$E[x] \pm 2\sigma$$

On retiendra qu'au moins 89 % de la population est comprise dans l'intervalle

$$E[x] \pm 3\sigma$$

I.I.2.5 - Population normale - loi de Laplace-Gauss

Pour illustrer les notions précédemment indiquées, nous terminons ce paragraphe en présentant les propriétés de la loi de Laplace-Gauss constituant un des modèles les plus utilisés pour représenter des distributions.

Cette loi doit son intérêt au fait qu'elle constitue la forme de loi limite de nombreuses distributions rencontrées dans la théorie de l'échantillonnage; elle est en particulier la loi limite des moyennes arithmétiques.

Elle est définie par $dF = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}} \cdot dx$

On vérifie que $\int_{-\infty}^{+\infty} dF = 1$, que $E[x] = m$ et que l'écart type est bien σ

La loi normale réduite s'écrit donc $dF = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

De même on montre que $M_{2k+1} = 0$

$$M_{2(k+1)} = \frac{(2(k+1))!}{2^{k+1}(k+1)!} \cdot \sigma^{2(k+1)} = (2k+1)\sigma^2 M_{2k}$$

La courbe de Gauss réduite est symétrique par rapport à l'axe $t = 0$
 La courbe de répartition réduite est symétrique par rapport au point
 ($t = 0$, $F(t) = 0.5$).

Enfin, pour une distribution normale :

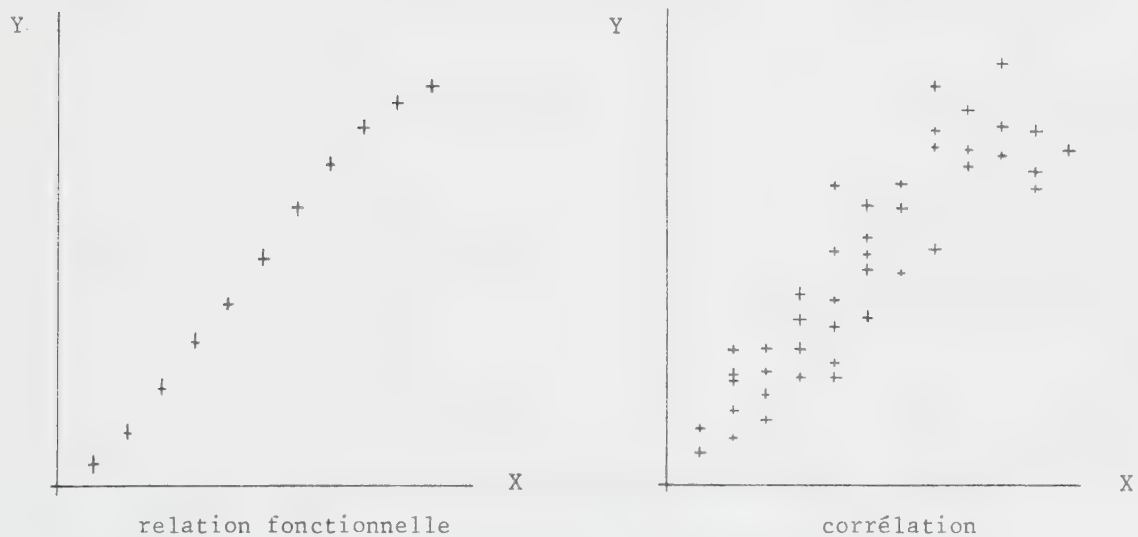
95 % des individus ont leur mesure comprise entre $E(x) \pm 1.96\sigma$
 99 % des individus ont leur mesure comprise entre $E(x) \pm 3.09\sigma$

I.I.3 - Distribution à 2 caractères

I.I.3.1. - Définitions

a) - Si nous voulons classer les individus d'une population suivant 2 caractères communs X et Y , à chaque valeur x de X peut correspondre 1 seule valeur y de Y ; X et Y sont liés par une relation fonctionnelle.

, à chaque valeur x de X peut correspondre plusieurs valeurs y de Y ; X et Y sont liés par une corrélacion.



Pour une corrélacion on peut étudier la moyenne des y pour chaque x et inversement. On définit ainsi 2 COURBES DE REGRESSION $X(y)$ de x en y et $Y(x)$ de y en x ; ces 2 courbes sont distinctes et ne passent pas en général par le centre de gravité de la distribution.

b) - Fréquences

On appelle table de contingence un tableau à double entrée en X et Y qui pour chaque valeur ou classe de x_i de X donne le nombre d'individus présentant la valeur ou le groupe de valeur classe y_j du caractère Y ; soit n_{ij} ce nombre.

$$\text{On note } n_{i.} = \sum_j n_{ij}$$

$$n_{.j} = \sum_i n_{ij}$$

$$\text{Il en ressort } N = \sum_{ij} n_{ij} = \sum_i n_{i.} = \sum_j n_{.j}$$

Fréquences globales :

$$\text{On note } x_i y_j / H = \frac{n_{ij}}{N} \text{ qui se lit } x_i \text{ et } y_j \text{ dans le champ } H$$

Ce champ désigne la totalité de la table de contingence ; c'est l'ensemble de la distribution. L'histogramme est constitué de prismes droits de volume proportionnel à n_{ij} élevés sur chaque case de la table de contingence.

Fréquences marginales :

On fait l'étude de la distribution suivant 1 caractère quel que soit l'autre.

$$\text{On note } x_i / H = \frac{n_{i.}}{N} \text{ de même } y_j / H = \frac{n_{.j}}{N}$$

Fréquences liées :

On fait l'étude de la distribution d'un caractère pour une valeur bien particulière de l'autre.

$$\text{On note } x_i / y_j H = \frac{n_{ij}}{n_{.j}} \text{ de même } y_j / x_i H = \frac{n_{ij}}{n_{i.}}$$

Ces 3 fréquences sont liées par les relations suivantes :

$$x_i y_j / H = x_i / H \cdot y_j / x_i H$$

$$x_i y_j / H = y_j / H \cdot x_i / y_j H$$

Variables indépendantes :

2 variables sont dites indépendantes si leur distribution liée est indépendante de la valeur du caractère de liaison.

$$x_i / y_j H = x_i / y_k H \quad \forall \quad x_i, y_j \text{ et } y_k$$

$$y_j / x_i H = y_j / x_l H \quad \forall \quad y_j, x_i \text{ et } x_l$$

Il en découle que :

$$x_i / y_j H = x_i / H$$

$$y_j / x_i H = y_j / H$$

$$x_i y_j / H = x_i / H \cdot y_j / H$$

I.I.3.2 - Paramètres

Pour les distributions à 1 caractère nous les avons définies pour une population dénombrable et pour son modèle mathématique. Nous pouvons faire de même ici.

Nous ne les présenterons que pour les modèles mathématiques.

I.I.3.3. - Modèles mathématiques

On suppose que x et y sont continus et qu'en tout point (xy) la distribution peut être définie par sa densité $f(xy)$.

La fréquence globale sera alors $dF = xy/H = f(xy) dx dy$

$$\iint f(xy) dx dy = 1$$

On peut donner le tableau récapitulatif suivant :

$$xy/H = f(xy) \, dx \, dy$$

$$x/H = f_1(x) \, dx = dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(xy) \, dy$$

$$y/H = f_2(y) \, dy = dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(xy) \, dx$$

$$x/yH = h_1(xy) \, dx = \frac{f(x \, y) \, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x \, y) \, dx}$$

$$y/xH = h_2(y \, x) \, dy = \frac{f(x \, y) \, dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(xy) \, dy}$$

$$f(xy) = f_1(x) \cdot h_2(y \, x)$$

$$f(xy) = f_2(y) \cdot h_1(x \, y)$$

$$\text{Par définition : } Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, h_2(y \, x) \, dy = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(xy) \, dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(xy) \, dy} ; \text{ de même pour } X(y)$$

Variables indépendantes :

$$f(xy) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Les courbes de regression sont des droites parallèles aux axes ; la réciproque n'est pas vraie.

Paramètres :

Espérance mathématique de x $E[x] = \iint x \cdot f(xy) \, dx \, dy$; de même pour $E[y]$.

On définit de même les variables centrées $\mathfrak{J} = x - E[x]$; $\eta = y - E[y]$ les moments d'ordre q/x et r/y

$$m_{qr} = \iint x^q y^r f(xy) \, dx \, dy$$

et les moments centrés $M_{qr} = \iint \mathfrak{J}^q \eta^r f(xy) \, dx \, dy$

en particulier M_{20} sera appelé variance x et noté σ_x^2

en particulier M_{02} sera appelé variance y et noté σ_y^2

en particulier M_{11} sera appelé covariance xy et noté cov_{xy}

pour 2 variables indépendantes $cov_{xy} = 0$; la réciproque n'est pas vraie.

Pour mesurer l'intensité de la liaison entre 2 variables on utilise un coefficient ρ appelé coef. de corrélation :

$$\rho = \frac{\text{cov}_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

ρ varie entre -1 et +1

$\rho = 0$ pour 2 variables indépendentes

$\rho = \pm 1$ pour 2 variables liées par une relation fonctionnelle bien particulière

$y = E[y] + \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - E[x])$ droite passant par le centre de gravité

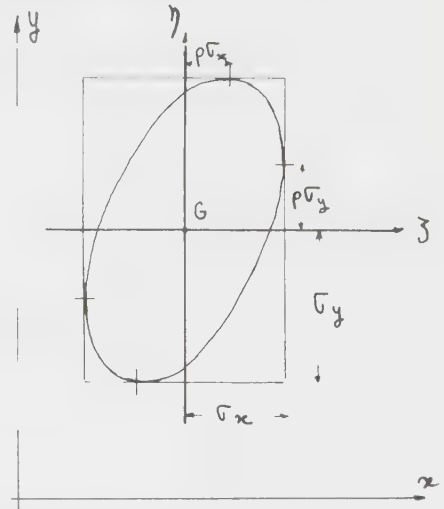
I.I.3.4 - Ellipses de Concentration - Généralisation de Bienaymé - Tchebycheef

a) - On peut définir une ellipse d'équation :

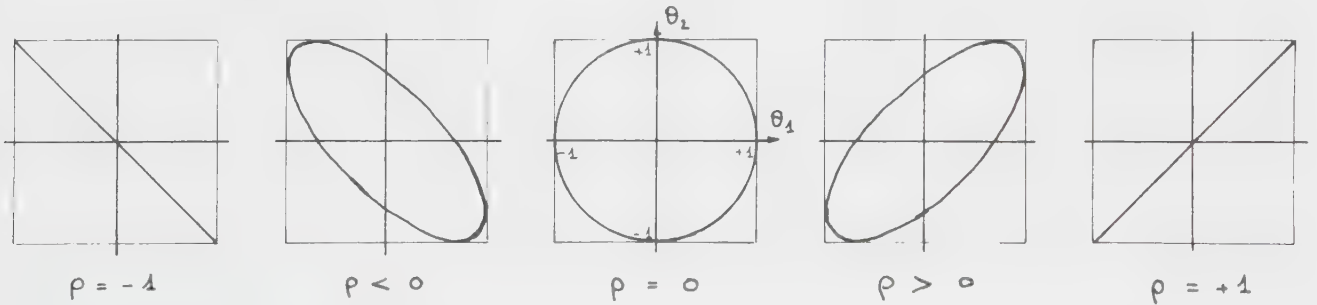
$$\frac{1}{1-\rho^2} \left\{ \frac{z^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{z}{\sigma_x} \cdot \frac{\eta}{\sigma_y} + \frac{\eta^2}{\sigma_y^2} \right\} = 1$$

qui présente les caractéristiques indiquées sur la figure.

Elle est appelée indicatrice de la distribution ; en variable réduite θ_1 et θ_2 le rectangle $2\sigma_x$, $2\sigma_y$ devient un carré 2,2.



On peut donner une représentation des paramètres de la distribution et de ρ .



Nous appellerons ellipses de concentration toute ellipse homothétique de l'indicatrice

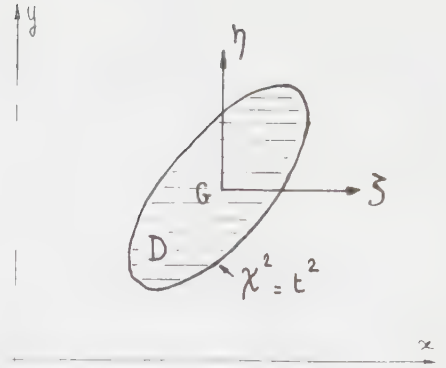
$$\frac{1}{1-\rho^2} \left\{ \frac{z^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{z}{\sigma_x} \frac{\eta}{\sigma_y} + \frac{\eta^2}{\sigma_y^2} \right\} = \chi^2$$

b) - Elles présentent la propriété fondamentale suivante :

soit t une valeur particulière de χ
la proportion d'individus se trouvant à l'intérieur de cette ellipse est supérieure ou égale à $1 - \frac{2}{t^2}$

$$\iint_D f(xy) \, dx \, dy \geq 1 - \frac{2}{t^2}$$

c'est la généralisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff.



c) - Droites de moindres carrés

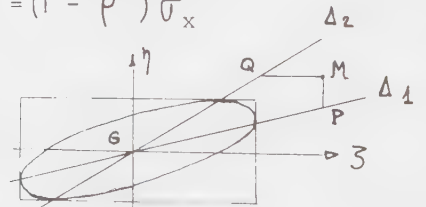
Elles sont telles que l'espérance mathématique du carré de la distance selon y ou x de chaque point à ces droites soit minima :

$$E [\overline{MP}^2] = \text{minima} \quad E [\overline{MQ}^2] = \text{minima}$$

et ont pour équation :

$$\Delta_1 \left\{ \begin{array}{l} Y - E[y] = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - E[x]) \\ E [\overline{MP}^2] = (1 - \rho^2) \cdot \sigma_y^2 \end{array} \right. \quad \Delta_2 \left\{ \begin{array}{l} X - E[x] = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - E[y]) \\ E [\overline{MQ}^2] = (1 - \rho^2) \sigma_x^2 \end{array} \right.$$

On vérifie que Δ_2 et Δ_1 sont respectivement diamètre conjugué pour l'indicatrice de Oy et Ox



I.I.3.5 - Loi normale de Laplace-Gauss à 2 variables

Elle s'écrit rapporté au centre de gravité

$$dF = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \chi^2} dx_1 \, dx_2$$

avec

$$\chi^2 = \frac{1}{1 - \rho^2} \left\{ \frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{x_1}{\sigma_1} \cdot \frac{x_2}{\sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} \right\}$$

Les ellipses de concentration $\chi^2 = \chi_\alpha^2$ sont des courbes d'isodensité.

$1 - \alpha$ désigne la proportion d'individus contenue dans l'ellipse.

La loi de Laplace-Gauss présente les caractéristiques suivantes :

pour

$\chi^2 = 0.446$	$1 - \alpha = 20 \%$
$\chi^2 = 1.386$	$1 - \alpha = 50 \%$
$\chi^2 = 3.219$	$1 - \alpha = 80 \%$
$\chi^2 = 5.991$	$1 - \alpha = 95 \%$
$\chi^2 = 9.210$	$1 - \alpha = 99 \%$
$\chi^2 = 13.815$	$1 - \alpha = 999 \%$

la distribution marginale de x_1 est la loi normale d'écart type σ_1

la distribution marginale de x_2 est la loi normale d'écart type σ_2

$$E[x_2 | x_1] = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1 \quad E[x_1 | x_2] = \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x_2$$

$$\sigma(x_2 | x_1) = \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \quad \sigma(x_1 | x_2) = \sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2}$$

Forme canonique de la loi :

On montre que par le changement de variable :

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(w - \frac{\varphi}{2}) & +\sin(w + \frac{\varphi}{2}) \\ -\cos(w - \frac{\varphi}{2}) & +\cos(w + \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sigma_1} \\ \frac{x_2}{\sigma_2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{ou } \varphi \text{ est défini par} \\ \cos \varphi = \rho \\ \text{et } w \text{ est un} \\ \text{paramètre arbitraire} \end{array}$$

$$\text{La loi prend la forme } dF = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)} dt_1 dt_2$$

où t_1 et t_2 sont 2 variables indépendantes.

$$\chi^2 = t_1^2 + t_2^2$$

1.1.4 - Fonctions multivariantes

Le champ de variables est à n dimensions.

Les n variables $x_1 \dots x_n$ admettent une loi de distribution
 $dF = f(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$.

Les fonctions $Z_j (x_1 \dots x_n)$ de ce champ de variables présentent certaines propriétés.

+ Espérance mathématique d'une somme

$$S = a_1 Z_1 + a_2 Z_2 \quad E[S] = a_1 E[Z_1] + a_2 E[Z_2]$$

+ Espérance mathématique d'un produit

$$\pi = Z_1 \times Z_2 \quad E[\pi] = E[Z_1] \times E[Z_2] + \text{cov}(Z_1, Z_2)$$

+ Ecart type d'une somme

$$\sigma_s^2 = a_1^2 \cdot \sigma_1^2 + a_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 a_1 a_2 \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

l'écart type de la somme $S = \sum a_i x_i$ sera, si les variables x_i sont indépendantes,

$$\sigma_s^2 = \sum a_i^2 \cdot \sigma_i^2$$

+ Ecart type d'une moyenne arithmétique

soit une variable x de paramètres σ_x et $\bar{x}_n$ $x_1 \dots x_n$ n valeurs indépendantes de la variable.

$$\bar{x}_n = \sum \frac{1}{n} x_i \quad \sigma_{\bar{x}_n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

+ Composition de variables normales

si les variables indépendantes $x_1 \dots x_n$ d'écart type $\sigma_1 \dots \sigma_n$ suivent une loi normale ;

$S = \sum a_i x_i$ est distribuée suivant une loi normale de paramètres

$$E[S] = \sum a_i m_i$$

$$\sigma_s = \sqrt{\sum a_i^2 \cdot \sigma_i^2}$$

en particulier la moyenne arithmétique d'une série de n valeurs indépendantes d'une variable normale x d'écart type σ_x est elle même une variable normale de paramètres:

$$E[\bar{x}_n] = E[x]$$

$$\sigma_{\bar{x}_n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

+ Ecart type des petites fluctuations d'une fonction quelconque autour d'une valeur fixe:

Si m_i et σ_i sont les paramètres des variables du champ.

$$\sigma_{dz}^2 = \sum_i \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{ij} \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right) \frac{\partial z}{\partial x_j}$$

I.II - CALCUL DES PROBABILITES

I.II.1 - Evènements aléatoires et probabilités

- Un évènement aléatoire est un évènement dont nous sommes incapables de prévoir si dans des circonstances données il se réalisera ou non.

- Un grand nombre d'essais permet d'observer une fréquence de réalisation qui peut tendre vers une limite fixe :

Cette fréquence limite sera appelée alors : Probabilité de l'évènement considéré. Elle varie entre 0 et 1.

I.II.1.1 - Estimation d'une probabilité

- La plupart des fois il est procédé expérimentalement : faire un grand nombre d'essais et estimer la fréquence limite.

- Dans certains cas on peut dénombrer à chaque essai le nombre de cas possibles et le nombre de cas favorables, alors :

$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

- On peut identifier chaque évènement par une variable discontinue ou continue qui est appelée variable aléatoire.

La répétition : infinie d'essais engendre une population limite de structure bien définie appelée Population mère. La distribution d'une ou plusieurs variables $x, y, z \dots$ caractérisant chaque évènement constitue la loi de probabilité des variables $x, y, z \dots$

Si la distribution admet une densité $f(x, y, z \dots)$ alors la probabilité dP d'observer un évènement dont les mesures sont comprises entre $x, x + dx$, $y, y + dy$, $z, z + dz \dots$ a pour valeur : $dP = f(xyz \dots) dx dy dz \dots$

Cette loi de Probabilité n'est en fait que la loi de distribution d'une population limite (Population mère) dont on peut définir espérance et moments.

I.II.1.2 - Evènements composés

La réalisation d'un évènement R résulte de la réalisation ou non d'évènements aléatoires A et B.

1°/ R se réalise si A ou B se réalise

$$R = A + B \quad (\text{Réunion})$$

noté aussi $A \cup B$

2°/ R se réalise si A et B se réalisent

$$R = A.B \quad \text{Intersection}$$

noté aussi $A \cap B$

On appelle complément d'un évènement l'ensemble des situations observées lorsque A ne se réalise pas. On note $\bar{A}$.

$$\text{Propriétés : } \bar{\bar{A}} + \bar{B} = \bar{A}.B$$

$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

Probabilités totales

Soit H le champ de circonstance où peuvent se produire A et B. On démontre que lorsqu'un évènement aléatoire $A + B$ peut se produire par la réalisation soit de A soit de B, la possibilité de réalisation de $A + B$ est égale à la somme des probabilités de réalisation de A et de B diminuée de la probabilité de réalisation simultanée de A et B.

$$(A + B) / H = A/H + B/H - AB/H$$

A et B sont dits exclusifs s'ils ne peuvent se réaliser simultanément $AB/H = 0$.

C'est le cas de A et $\bar{A}$ $(A + \bar{A})H = A/H + \bar{A}/H = 1$

Probabilités composées

De même la probabilité de réalisation simultanée de A et B est égale à la probabilité de réalisation de l'un d'eux multipliée par la probabilité de réalisation de l'autre, sachant que le premier s'est effectivement réalisé :

$$AB/H = A/H \times B/AH$$

Evènements aléatoires indépendants :

$$AB/H = A/H \times B/H$$

I.II.1.3 - Probabilité des causes - Théorème de BAYES

Soit A ne pouvant se réaliser qu'après réalisation d'une cause C_i .
La probabilité "a posteriori", C_i/AH , pour que la cause C_i se soit effectivement réalisée dans le cas où on aura constaté la réalisation de A a pour expression:

$$C_i/AH = C_i/H \times \frac{A/C_iH}{AH}$$

Si on admet que les diverses causes sont exclusives :

$$A/H = \sum_i A C_i/H = \sum_i \left\{ C_i/H \times A/C_iH \right\}$$

d'où
$$C_i/AH = C_i/H \times \frac{A/C_iH}{\sum_i \{ C_i/H \times A/C_iH \}}$$

I.II.2 - Les épreuves multiples

I.II.2.1 - Echantillonnages exhaustifs

On appelle échantillonnage exhaustif, un mode de prélèvement susceptible d'épuiser la population d'extraction.

Dans un lot de N individus, D présentent un certain caractère X
on extrait un échantillon de n individus.

La probabilité pour que p individus de l'échantillon présentent le caractère X est :

$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{C_D^d \times C_{N-D}^{n-d}}{C_N^n}$$

Généralisation :

La population N est définie par $N = \sum D_i$

L'échantillon n $n = \sum d_i$

$$P = \frac{C_{D1}^{d1} \dots C_{Dq}^{dq}}{C_N^n}$$

Tirage exhaustif de plusieurs échantillons $n_1, n_2, \dots, n_k$
de composition $d_{i1}, \dots, d_{iq}$, pour ^{1e} ième échantillon.

La probabilité d'obtenir une telle composition pour ces k échantillons sera :

$$P = \frac{1}{N!} \times \frac{\prod_i (n_i!) \cdot \prod_j (D_j!)}{\prod_{ij} (d_{ij}!)}$$

I.II.2.2. Lois des épreuves répétées

On appelle suite d'épreuves répétées vis à vis de l'évènement A une série d'épreuves au cours desquelles la probabilité de réalisation de A ne varie pas.

a) - Loi de BERNOUILLI (ou des épreuves répétées)

Soit p la probabilité de réalisation de A

Soit n le nombre d'épreuves.

La probabilité pour qu'au cours des n épreuves A se réalise x fois sera :

$$P \left\{ x \middle| n \right\}_p = C_n^x \cdot p^x \cdot q^{n-x} \quad q = p - 1$$

Elle peut être utilisée comme expression approchée d'un tirage exhaustif

$$\left. x \right|_p = \frac{D}{N} \quad \text{dans le cas où} \quad n \leq 0,10N$$

La loi de BERNOUILLI présente les paramètres suivants :

$$E[x] = np \quad \sigma_x = \sqrt{npq}$$

sa fonction de répartition s'écrit : $F(x) = q^n + nq^{n-1} \cdot p + \dots + C_n^x q^{n-x} \cdot p^x$

ou encore $F(x) = 1 - \frac{B_p\{x+1, n-x\}}{B_1\{x+1, n-x\}}$
 $B_p(q, b)$ fonction Eulerienne incomplète de lère espèce
 $B_1(q, b)$ fonction Eulerienne complète de lère espèce

Généralisation

L'ensemble des éléments $A_1, \dots, A_k$ constituent la totalité des cas possibles

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$$

La possibilité pour que les événements A_e se réalisent α fois A_h , λ fois au cours de n épreuves est :

$$P = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!} p_e^\alpha p_f^\beta \dots p_n^\lambda \quad (\text{avec } \alpha + \beta + \dots + \lambda = n)$$

les paramètres de cette loi seront :

$$E[x_f] = np_f \quad \sigma_f^2 = np_f(1 - p_f) \quad \text{cov}(x_f, x_g) = -np_f \cdot p_g$$

$$\rho_{fg} = -\sqrt{\frac{p_f \cdot p_g}{(1 - p_f)(1 - p_g)}}$$

b) - Loi des grands nombres

La Loi de BERNOULLI admet une forme limite lorsque le nombre des épreuves répétées devient suffisamment grand .

C'est en fait la fonction de répartition de la variable réduite $t = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$ qui tend vers la loi de répartition de la variable normale réduite. L'approximation entre les 2 lois de distribution est valable dès que $\sqrt{npq} \geq 5$.

c) - Loi des petites probabilités ou loi de POISSON

Lorsque p est petit on peut remplacer la distribution de BERNOULLI par une distribution de POISSON. L'approximation est bonne pour $p \leq 0,10$.

Loi de Poisson

Le diagramme de distribution de la loi de POISSON est un diagramme en bâtons rompus s'étendant à l'ensemble des entiers naturels et de hauteur $p(x) = e^{-\nu} \frac{\nu^x}{x!}$

On montre que $C_n^x \cdot p^x \cdot q^{n-x} \approx e^{-\nu} \frac{\nu^x}{x!}$ avec $\nu = np \quad \forall (x \leq n) \in \mathbb{N}$
La fonction de répartition sera $\forall x, c \in \mathbb{N} \quad F_{(c)} = \sum_{x=0}^c e^{-\nu} \frac{\nu^x}{x!}$

pouvant s'écrire aussi $F_{(c)} = 1 - \frac{\Gamma_\nu(c+1)}{\Gamma(c+1)}$

Γ et Γ_ν fonctions eulériennes complète et incomplète de 2ème espèce.

Les paramètres de la loi sont :

$$E[x] = \nu \quad \sigma_x = \sqrt{\nu} \quad \mu_3 = \nu$$

I.III - THEORIE DE L'ECHANTILLONNAGE

I.III.1 - Notions de convergence et d'estimation en probabilité

I.III.1.1 - Convergence

Soit une population de moyenne arithmétique $\bar{x}_n = \frac{\sum x_i}{n}$
 pour que $\bar{x}_n \rightarrow E[x]$ il faut que $E[x] \exists$, c'est-à-dire que la distribution admette un modèle mathématique d'espérance

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Supposons que $E[x]$ et $\sigma_x \exists$

Nous dirons que a_n converge vers α si on peut trouver n tel que :

$$Pr \left\{ |a_n - \alpha| \leq \varepsilon \right\} \geq 1 - \eta \quad \varepsilon \text{ et } \eta \text{ aussi petits soient-ils.}$$

Rapidité de convergence

Pour une distribution quelconque, on montre que pour obtenir :

$$Pr \left\{ |\bar{x}_n - E[x]| \leq \varepsilon \sigma_x \right\} \geq 1 - \eta \quad \text{il faut choisir } n \geq \frac{1}{\varepsilon^2 \eta}$$

pour $\varepsilon = 0,1$ et $\eta = 0,05$, on a $n \geq 2000$

Distribution limite de la moyenne arithmétique

On démontre que $\forall$ la loi de distribution de x , la distribution de $\bar{x}_n$ tend vers une loi normale d'écart type $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ et d'espérance $E[x]$

$$\text{d'où } Pr \left\{ |\bar{x}_n - E[x]| \leq 1,96 \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \right\} \geq 0,95$$

$$\text{pour } \varepsilon = 0,1 \quad \text{et } \eta = 0,05 \quad \frac{1,96}{\sqrt{n}} \geq 0,1 \quad n \geq 400$$

On voit donc que 2000 était largement en excès.

I.III.1.2. Estimation

a) - Définition

On dit que :

a_n est une estimation de α si $a_n \rightarrow \alpha$ quand $n \rightarrow \infty$

a_n est une estimation simplement convergente de α si $E[a_n] \rightarrow \alpha$ quand $n \rightarrow \infty$

a_n est une estimation absolument convergente de α si $E[a_n] = \alpha \quad \forall n$

b) - Estimation d'un écart type

Soit s l'écart type d'un échantillon $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_n)^2}{n}$ et σ_x^2
l'écart type théorique de la population mère.

on montre que $E[s^2] = \frac{n-1}{n} \sigma_x^2$

$s'^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}$ noté S_x^2 est donc une estimation absolument convergente de σ_x^2
c'est S_x que nous utiliserons pour connaître σ_x

I.III.2 - Distributions déduites de la loi de GAUSS

I.III.2.1 - Loi du χ^2 : KARL PEARSON

- $\chi^2(\nu) = t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_\nu^2$ t_i variables de GAUSS, indépendantes, réduites.

- Propriétés

$$E[\chi^2(\nu)] = \nu$$

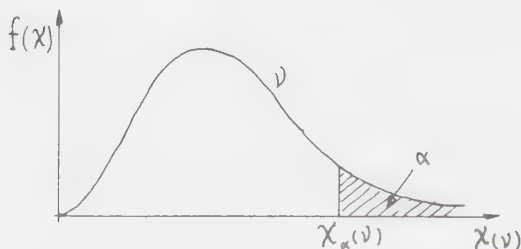
$$\mu_2 = \sigma_{\chi^2(\nu)}^2 = 2\nu$$

$$\chi^2(\nu_1) + \chi^2(\nu_2) = \chi^2(\nu_1 + \nu_2)$$

- Distribution

$$f(\chi) d\chi = \frac{e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \chi^{\nu-1} d\chi}{\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \chi^{\nu-1} d\chi}$$

- Table - Courbe de densité



La table donne pour un ν donné

$$\alpha = \Pr \left\{ \chi^2(\nu) \geq \chi^2_\alpha(\nu) \right\}$$

Chaque fois qu'une variable peut être égale à une somme de carré, c'est une variable χ^2 .

- Distribution d'une estimation absolument convergente de l'écart type théorique σ_x

C'est une distribution en χ^2 ; on démontre que $s_x^2 = \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{(n-1)}^2$

pour les applications, on utilisera : $\chi^2(\nu) = \frac{\nu s^2}{\sigma^2}$

on peut calculer l'intervalle de Probabilité $(1 - \alpha)$ du rapport $\frac{s}{\sigma}$:

$$0 \leq \frac{s}{\sigma} \leq \sqrt{\frac{\chi_{0.05}^2(\nu)}{\nu}} \quad \nu = n-1 \quad \text{dans 95\% des cas}$$

I.III.2.2 - Loi de FISHER-SNEDECOR

Soit 2 populations normales σ_1 et σ_2 et 2 séries d'observations S_1^2 et S_2^2

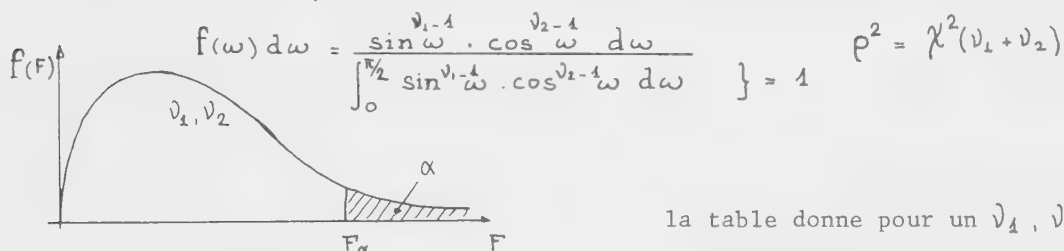
$$F(\nu_1, \nu_2) = \frac{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}}{\quad} \quad \text{avec} \quad \nu_1 = n_1 - 1 \quad \nu_2 = n_2 - 1$$

$$F(\nu_1, \nu_2) = \frac{\chi_1^2(\nu_1)}{\chi_2^2(\nu_2)} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

- Distribution

En posant $\chi_1 = \rho \sin \omega$
 $\chi_2 = \rho \cos \omega$

on montre que ω et ρ sont des variables indépendantes et que les lois s'écrivent:



la table donne pour un ν_1, ν_2 donné

$$\alpha = \Pr \left\{ F(\nu_1, \nu_2) \geq F_\alpha(\nu_1, \nu_2) \right\}$$

- Propriétés

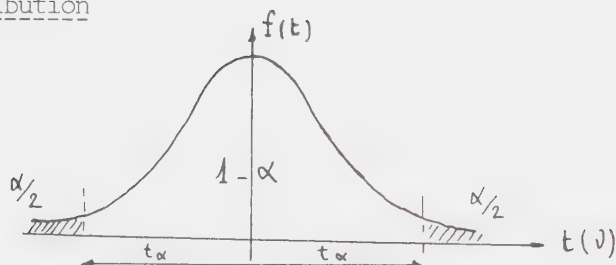
$$F_\alpha(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)}$$

Cas particulier $\nu_1 = 1, \nu_2 = \nu \quad F(1, \nu) = t^2(\nu)$ appelée variable de STUDENT

$$t^2(\nu) = \nu \frac{\chi^2(1)}{\chi^2(\nu)}$$

on montre que si $\nu \rightarrow \infty \quad t(\nu) \rightarrow$ variable de Gauss réduite.

- Distribution



$$t^2(v) = \frac{\chi^2(1)}{\chi^2(v)}$$

$$F_{\alpha}(1, v_2) = t_{\alpha}^2(v_2)$$

$$F(1, \infty) = t^2(\infty)$$

I.III.3 - Erreurs d'échantillonnage - Notion de limite de confiance

I.III.3.1 - Intervalle de confiance d'une moyenne

Soit x de distribution gaussienne $E[x]$ et σ et un échantillon extrait $\bar{x}_n$, s nous cherchons l'intervalle (A,B) tel que :

$$\text{Prob} \left\{ A \leq E[x] \leq B \right\} = 1 - \alpha$$

on démontre que $A = \bar{x}_n - t_{\alpha}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}$ $B = \bar{x}_n + t_{\alpha}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}$ (table de Student)

A,B varie en fonction de l'échantillon

tout ceci n'a de sens que pour $\alpha \leq 0,10$.

Pour accroître la précision des mesures, il faut accroître l'effectif de l'échantillon.

I.III.3.2 - Intervalle de confiance d'un écart type théorique

Nous prenons $\alpha_1 - \alpha_2 = 1 - \alpha$ $v = n - 1$

$$\text{Prob} \left\{ A \leq \sigma^2 \leq B \right\} = 1 - \alpha$$

$$A = \frac{v s^2}{\chi_{\alpha_1}^2(v)}$$

$$B = \frac{v s^2}{\chi_{\alpha_2}^2(v)}$$

(table du χ^2)

I.III.3.3 - Erreur à craindre sur l'estimation du rapport de 2 dispersions

2 échantillons n_1 et n_2

$$r = \frac{s_1}{s_2}$$

$$\rho = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 1 - \alpha$$

$$\text{Prob} \left\{ \frac{1}{F_{\alpha_1}(v_1, v_2)} \cdot r^2 < \rho^2 < \frac{1}{F_{\alpha_2}(v_1, v_2)} \cdot r^2 \right\} = 1 - \alpha$$

(table Fisher Snedecor)

I.III.3.4 - Erreur à craindre sur la différence de 2 moyennes

2 populations de même écart type σ

2 échantillons $\bar{x}_{n_1}$, $\bar{x}_{n_2}$: $\delta_0 = E[x_1] - E[x_2]$

Soit $d = \bar{x}_{n_1} - \bar{x}_{n_2}$ σ_{δ} son écart type et s_{δ} une estimation de σ_{δ}

$$\text{Prob} \left\{ d - t_{\alpha}(\nu) \cdot s_{\delta} < \delta_0 < d + t_{\alpha}(\nu) \cdot s_{\delta} \right\} = 1 - \alpha \quad (\text{table de Student})$$

$$s_{\delta}^2 = \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2} S^2 \quad \text{avec} \quad S^2 = \frac{\sum_i (x_{1i} - \bar{x}_{n_1})^2 + \sum_j (x_{2j} - \bar{x}_{n_2})^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

I.III.3.5 - Erreur à craindre sur l'estimation d'une probabilité

Voir table X.

I.IV - TESTS STATISTIQUES OU TESTS D'HYPOTHESE

I.IV.1 - Définitions

I.IV.1.1 - Risque de 1° et 2° espèce

On cherche à vérifier une hypothèse H_0 sur la structure d'une population. On appelle risque de 1° espèce, le risque de rejeter une hypothèse H_0 qui est exacte :

2° espèce, le risque d'accepter une hypothèse H_1 qui est fautive :

Ex. : pile ou face - 400 coups x : nombre de faces x , distribution normale.

Pièce symétrique

- H_0 ($p = q = \frac{1}{2}$) $\parallel$ $E[x] = np = 200$
 Hypothèse juste $\parallel$ $\sigma_x = \sqrt{npq} = 10$
 Règle de décision : accepter H_0 si $180 < x < 220$ dans 95% des cas
 $1 - \alpha = \text{Prob} \left\{ 200 - 1,96 \times 10 < x < 200 + 1,96 \times 10 \right\} = 95 \% \quad \alpha = 0,05$
 Risque de rejeter comme fautive l'hypothèse juste $H_0 = 0,05$

Pièce dissymétrique

- H_1 ($p_1 = 0,45 \quad q_1 = 0,55$) $\parallel$ $E_1(x) = np_1 = 180$
 Hypothèse juste $\parallel$ $\sigma_{1x} = 9,95$
 H_0 ($p = q = \frac{1}{2}$) Hypothèse fautive
 $\beta_1 = \text{Prob} \left\{ 180 < x < 220 \mid \begin{array}{l} n = 400 \\ p_1 = 0,45 \\ q_1 = 0,55 \end{array} \right\} = F(b) - F(a)$
 lié à H_1

$$\text{avec} \quad b = \frac{220 - E_1(x)}{\sigma_1} \quad a = \frac{180 - E_1(x)}{\sigma_1}$$

Risque d'accepter comme juste l'hypothèse fautive $H_0 = 0,5 = \beta_1$

- H_2 ($p_2 = 0,40 \quad q_2 = 0,60$) $\parallel$ $\beta_2 = 0,02$
 hypothèse juste $\parallel$ lié à H_2

I.IV.2.2 - Test de Fisher pour comparer 2 dispersions

2 populations σ_1, σ_2 $H_0 (\sigma_1 = \sigma_2)$

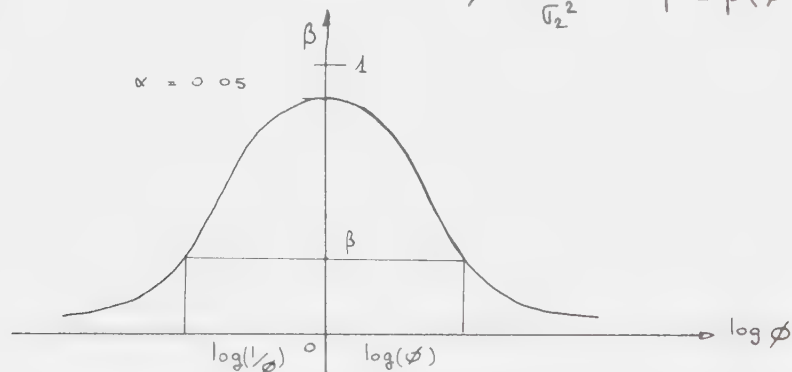
échantillons de } s_1, s_2 $\nu = n - 1$
même taille n

On admet $\sigma_1 = \sigma_2$ si $F_{1-\alpha/2}(\nu, \nu) \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{\alpha/2}(\nu, \nu)$

Risque de 1ère espèce : α

Courbe d'efficacité

$$\phi = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \quad \beta = \beta(\phi)$$



$$\beta(\phi) = \text{Prob.} \left\{ \frac{1}{\phi F_{\alpha/2}(\nu, \nu)} \leq F(\nu, \nu) \leq \frac{F_{\alpha/2}(\nu, \nu)}{\phi} \right\} \quad F(\nu, \nu) = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$$

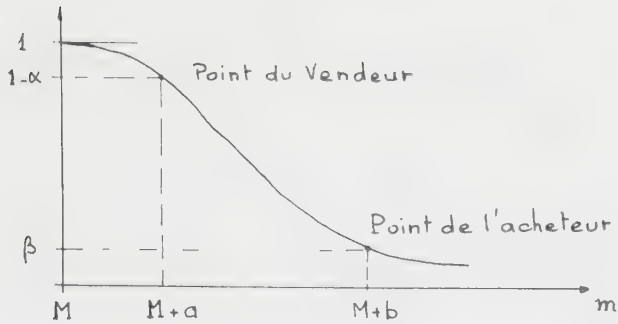
I.IV.3 - Contrôle par prélèvement

Soit x le paramètre étudié, $E[x]$ la valeur théorique souhaitée
 m la moyenne réalisée et σ l'écart type supposé connu.

L'acheteur exige : $|E[x] - m| < b$

Le vendeur promet : $|E[x] - m| < a < b$

Règle de décision : procédé d'échantillonnage qui conduit à avoir une probabilité $1 - \alpha$ (par exemple 95 %) d'accepter une population dans laquelle $|M - m| < a$, (Le risque du vendeur est α Probabilité de rejeter la population) et une probabilité β (par exemple 5 %) d'accepter une population pour laquelle $|M - m| > b$ (Le risque de l'acheteur est β Probabilité d'accepter $|M - m| > b$) D'après le procédé d'échantillonnage on trace la courbe représentant la probabilité d'accepter une population de moyenne m . On obtient la "courbe d'efficacité" de l'échantillonnage.



I.IV.3.1 - Contrôle classique

Détermination de la taille n de l'échantillon de moyenne $\bar{x}$

On choisit δ tel que $|M - \bar{x}| < \delta$ entraîne l'acceptation
 $> \delta$ entraîne le refus

Soit x_β tel que $1 - \beta = \text{Prob} \{ x \geq x_\beta \}$ x variable de Gauss | Tables
 x_α tel que $1 - \alpha = \text{Prob} \{ x \geq x_\alpha \}$ | de la loi
 normale

n et δ sont donnés par :

$$b - \delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_\beta$$

$$\delta - \alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_\alpha$$

Si la valeur de σ estimée, donc utilisée dans les calculs, est supérieure à la valeur vraie α et β sont en réalité plus faibles. Le contrôle est plus efficace que prévu.

I.IV.3.2. Contrôle progressif

Connaissant a, b, α, β , on tire un échantillon k

3 solutions : 1°/ accepter la fabrication

2°/ refuser la fabrication

3°/ faire un nouveau tirage pour juger sur un échantillon $k+1$

En supposant x régi par une loi normale, on est conduit à :

$$\text{Accepter si } \left| \sum x_i - kM \right| \leq \frac{\sigma^2}{b-a} \cdot \log_e \frac{\beta}{1-\alpha} + k \frac{b+a}{2} = E$$

$$\text{Refuser si } \left| \right| \geq \frac{\sigma^2}{b-a} \log_e \frac{1-\beta}{\alpha} + k \frac{b+a}{2} = F$$

faire un nouveau tirage si

$$E \leq \left| \sum x_i - kM \right| \leq F$$

Le contrôle conduit à une taille d'échantillon inférieure au cas du contrôle classique.

2ème Chapitre

LES DIFFERENTES APPLICATIONS EN MECANIQUE DES SOLS

II.1 - LES DIFFERENTS TYPES DE DONNEES

Dans l'introduction nous avons vu les différents types de problèmes auxquels est confronté le mécanicien des sols. Leur étude en utilisant les possibilités du calcul de probabilité statistique, que nous venons de présenter, nécessite la connaissance de 3 types de données :

- la loi rhéologique supposée régir le matériau
- les forces de volume appliquées au matériau
- les conditions aux limites du matériau

II.1.1 - Lois Rhéologiques

Dans un problème particulier, l'ingénieur présuppose la loi de comportement du matériau pour mener son calcul (par exemple en élasticité ou en plasticité) il détermine les caractéristiques mécaniques du matériau quant à la loi envisagée. Ce sont ces caractéristiques, ces paramètres mécaniques qui constitueront pour nous un premier groupe de données.

Elles sont nombreuses, d'autant qu'un matériau est régi dans un domaine de l'espace contrainte ou déformation par une loi qui s'applique plus ou moins bien et dans d'autres domaines par d'autres lois.

D'autre part, le sol est polyphasique et les paramètres peuvent caractériser une ou plusieurs phases.

Nous nous limitons bien sûr dans ce choix pour plusieurs raisons :

- Nous souhaitons avoir un stockage le plus complet possible donc nous prenons les paramètres les plus couramment mesurés et relevables de façon simple dans les dossiers d'essais.

- Ce n'est qu'après une première étude générale et dans plusieurs directions que nous pourrions commencer à discerner les données intéressantes de celles dont l'étude ne conduit pas à des résultats.
- Des études particulières sont toujours possibles en dehors du mode de stockage que nous présenterons dans la 2ème partie.
- Le mode de stockage (Fichiers en mémoire électronique) est modifiable à volonté. Il ne se heurte qu'à des questions de capacité de mémoire, de temps de travail de l'ordinateur qui ne saurait arrêter la recherche mais l'entraver par le niveau de son coût.

Nous relevons les paramètres des essais de compression sur des sols mono ou biphasiques et les paramètres des essais de tassement. Ces paramètres relevés intéressent la loi de comportement élastique, plastique et la théorie de la consolidation primaire, entre autres.

Nous verrons dans la 2ème Partie quels sont plus précisément ces paramètres et les raisons de leur choix.

II.1.2 - Les forces de volumes

Elles sont peu nombreuses.

Ce sont le "poids des terres"; il faudra caractériser les 2 phases (grains, liquide), les écoulements d'eau et gradient hydraulique caractérisables par la perméabilité, la saturation.

Ces paramètres sont appelés à juste titre paramètres physiques à côté des paramètres mécaniques que nous avons classés comme caractéristiques des lois rhéologiques.

Mais d'autres paramètres physiques n'entrent pas dans la caractérisation de l'état de sollicitation du matériau, mais du matériau lui-même ce sont les paramètres d'identification comme la granulométrie, comme les limites d'Atterberg, comme la composition physico-chimique des fins, les caractéristiques de compactage. Leur étude de ce fait est particulièrement intéressante quant à leur influence sur les caractéristiques rhéologiques du matériau.

Comme précédemment nous nous sommes limités dans le choix de ces caractéristiques des forces de volume et des identificateurs du matériau. Nous indiquons comment dans la 2ème partie.

II.I.3 - Les conditions aux limites

Elles sont caractérisées par des données de géométrie de contour, de géométrie de sollicitation, de liberté et quantité de déplacements aux frontières.

Ce sont donc des données d'espaces qui concrétisent le problème particulier à résoudre.

Pour nous, nous nous sommes intéressés principalement à la géométrie de volume et charges naturelles, seules données stockables de façon simple au point où nous en sommes. Quant aux données de volumes et surcharges qui sont le fait de l'intervention de l'homme (géométrie de fondations, remblais, fouilles) elles peuvent être l'objet d'autant d'études particulières avec un stockage adapté.

Par contre, nous prenons en compte les essais en place qui, s'ils ne caractérisent pas uniquement des conditions aux limites, sont des tests empiriques de lois rhéologiques dans des conditions aux limites particulières ; celles-ci sont propres à la nature de l'essai en place et donc répertoriables facilement.

L'intérêt qu'il faut porter à ces résultats d'essais doit être très grand :

- Ils intéressent une quantité de matériaux beaucoup plus importante que les essais en Laboratoire et leurs indications sont plus significatives.

- Alors que l'essai en Laboratoire tend à fournir les caractéristiques de lois rhéologiques théoriques, l'essai en place fournit généralement les paramètres d'une loi de comportement expérimentale liée aux conditions aux limites imposées par l'essai lui-même.

A ce titre les données fournies par ces essais appartiennent au 1er groupe que nous avons appelé : "Caractéristiques de lois rhéologiques du matériau".

II.II - CHAMP D'APPLICATION DES PROBABILITES-STATISTIQUES -DIRECTIONS DE RECHERCHES

Dans le traitement de ces données, nous pouvons, d'après leur nature même, séparer deux thèmes de recherches :

- 1°/ l'étude des données liées à l'espace
- 2°/ l'étude des données en elles-mêmes sans préoccupation d'espace.

Ces deux thèmes de recherches entretiennent en effet une relative indépendance. Dans le 1er thème le facteur volume, positionnement, jouera un rôle essentiel, c'est principalement par rapport à lui que la recherche se mènera pour appréhender de façon probabilistique un site et en tirer, quant à son histoire, des conclusions pouvant être appliquées dans d'autres sites. L'étude qui bien entendu peut se développer vers toutes les données sera particularisée.

Dans le 2ème thème, ce facteur espace n'intervient pas ; la recherche se mènera essentiellement en direction d'une caractérisation des "sols", de nouvelles lois statistiques, de tests des lois déjà avancées entre des paramètres. Ne particularisant pas ses données, l'étude des paramètres sera plus poussée et généralisable. Elle sera un apport au 1er thème comme les conclusions du 1er éclaireront ce dernier d'un point de vue essentiel : celui de l'histoire du matériau.

Voyons maintenant quelle utilisation nous pouvons faire du calcul des probabilités statistiques dans ces deux thèmes de recherches.

II.II.1 - Dispersion des données

Notre étude intéresse tous les paramètres aussi bien ceux caractérisant des lois rhéologiques, des forces de volume que ceux d'identification.

En fonction des deux thèmes définis précédemment, nous avons deux façons de procéder.

II.II.1.1 - Par type de "sol"

Nous entendons par là tout matériau qui présente avec d'autres un même caractère. Ce caractère peut être le plus logique : son appartenance à une classe

bien définie : argile plastique, limon sableux, par exemple. Le caractère commun sera donc les paramètres d'identification (1 ou plusieurs).

C'est par là qu'il faut, à notre avis commencer.

Nous étudierons pour un sable bien calibré la dispersion par exemple de l'angle de frottement intergranulaire.

Mais ce caractère commun peut être tout autre, par exemple un module de compression, une cohésion.

Dans ces études, nous utiliserons principalement la statistique descriptive pour caractériser une distribution, la théorie de l'échantillonnage pour connaître à partir d'un échantillon les caractéristiques de la population, les tests statistiques ou d'hypothèse pour vérifier une hypothèse sur la structure d'une population.

Cette étude doit permettre en repérant les irrégularités de distribution de réaborder peut être le classement des sols en 15 catégories (Classification of the Bureau of Reclamation).

D'autre part, elle débouche directement sur le calcul de corrélation que nous verrons un peu plus loin.

II.II.1.2. Par zones "homogènes"

Nous entendons par là une zone, c'est-à-dire un volume bien défini dans l'espace, qui présente en tous ses points un caractère fixe. Ici aussi le plus logique est de prendre comme caractère commun un ou plusieurs paramètres d'identification. Nous pourrions étudier par exemple pour les alluvions graveleuses du Drac ou de l'Isère, la dispersion du poids spécifique sec ou d'un caractère granulométrique.

On cherchera à définir en particulier un champ statistique pour un paramètre dans une zone dite homogène.

Cette étude est un élément à notre avis de l'étude de l'histoire de la sédimentation dans un site et de la recherche des causes historiques de la présence de tel sédiment et de la dispersion de ces paramètres.

Elle débouche elle aussi sur le calcul de corrélation mais principalement entre un paramètre et le positionnement.

II.II.2 - Etudes du matériau "sol"

Nous désignons ainsi l'étude plus particulière des paramètres du sol en fonction les uns des autres. C'est le domaine des corrélations entre deux ou plusieurs variables.

II.II.2.1 - Représentation graphique d'une corrélation à 2 paramètres

a) Ellipses de concentration - indicatrice

Nous avons vu que les ellipses de concentrations étaient homothétiques de l'indicatrice.

Indicatrice $f(\xi^2, \eta^2) = 1$; Ellipse de concentration $f(\xi^2, \eta^2) = t^2$

Le théorème de Bienaymé Tchebicheef nous indique que quelque soit la distribution, la proportion d'individus à l'intérieur d'une ellipse de concentration t est supérieure ou égale à :

$$1 - \frac{2}{t^2}$$

Soit pour	$t = 2$	$P \geq 50 \%$
	$t = 3$	$P \geq 77,7 \%$
	$t = 4$	$P \geq 87,5 \%$

Pour une distribution normale, on obtient un résultat bien meilleur

$t \neq 1,17$	$P \geq 50 \%$
$t \neq 1,80$	$P \geq 80 \%$
$t \neq 2,45$	$P \geq 95 \%$

Les ellipses de concentration sont une lère représentation chiffrée d'une distribution à 2 paramètres.

Caractéristiques de l'indicatrice et des ellipses de concentration

- Intersection avec les axes

$$\left. \begin{aligned} GM_{\xi} &= \overline{G}_x \sqrt{1 - \rho^2} \\ GM_{\eta} &= \overline{G}_y \sqrt{1 - \rho^2} \end{aligned} \right| \text{indicatrice} \quad \begin{aligned} GM_{\xi}^t &= t \overline{G}_x \sqrt{1 - \rho^2} \\ GM_{\eta}^t &= t \overline{G}_y \sqrt{1 - \rho^2} \end{aligned}$$

- Tangentes aux points d'intersection

$$\xi f'_{\xi_0} + \eta f'_{\eta_0} + \tau f'_{\tau_0} = 0$$

T variable homogène

pente de la tangente $m = - \frac{f'_{\xi_0}}{f'_{\eta_0}}$

$$\text{en } M_{\xi} \left| \begin{array}{c} \overline{G}_x \sqrt{1 - \rho^2} \\ 0 \end{array} \right. \quad m = - \frac{\frac{2}{\overline{G}_x^2} (\overline{G}_x \sqrt{1 - \rho^2})}{-2 \rho \frac{\overline{G}_x \sqrt{1 - \rho^2}}{\overline{G}_x \overline{G}_y}} = \frac{1}{\rho} \frac{\overline{G}_y}{\overline{G}_x}$$

$$\text{en } M_{\eta} \left| \begin{array}{c} 0 \\ \overline{G}_y \sqrt{1 - \rho^2} \end{array} \right. \quad m = \rho \frac{\overline{G}_y}{\overline{G}_x}$$

Axes de l'ellipse

$$f(\xi, \eta) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\xi, \eta) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 1$$

soit $\text{tg } \alpha$ la pente d'un axe

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2B}{A - C} = 2\rho \frac{\overline{G}_x \overline{G}_y}{\overline{G}_x^2 - \overline{G}_y^2} = 2\rho K$$

Axe du rectangle circonscrit

$$\text{tg } \alpha' = \frac{\overline{G}_y}{\overline{G}_x} = K' \quad K = \frac{K'}{1 - K'^2}$$

pour $\rho = 1$

$$\text{tg } 2\alpha = 2K \quad \text{tg } \alpha = \text{tg } \alpha'$$

b) Droite des moindres carrés

Leurs équations sont :

$$\Delta_1 \text{ de } y \text{ en } x : \quad \eta = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \xi \quad E[MP^2] = \sigma_y^2 (1 - \rho^2)$$

$$\Delta_2 \text{ de } x \text{ en } y : \quad \xi = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \eta \quad E[MQ^2] = \sigma_x^2 (1 - \rho^2)$$

$E[MP^2]$ n'est autre que la variance de M rapporté à Δ_1 (distance verticale)

$E[MQ^2]$ n'est autre que la variance de M rapporté à Δ_2 (distance horizontale)

Représentation de la dispersion :

D'après Bienaymé Tchebicheeff, dans la bande de hauteur $t \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}$ autour de Δ_1 nous avons au moins $1 - \frac{1}{t^2}$ % des points.

Dans la bande de largeur $t \sigma_x \sqrt{1 - \rho^2}$ autour de Δ_2 nous avons au moins $1 - \frac{1}{t^2}$ % des points.

Pour	$t = 1$	$P \geq 0$
	$t = 2$	$P \geq 75 \%$
	$t = 3$	$P \geq 89 \%$

Si les distributions liées sont normales :

Pour	$t = 1$	$P \geq 62,2 \%$
	$t = 1,96$	$P \geq 95 \%$
	$t = 3,09$	$P \geq 998 \%$

Bissectrice de Δ_1 et Δ_2

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \rho K' \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1}{\rho} K'$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{K'(\rho + \frac{1}{\rho})}{1 - K'^2} = (\rho + \frac{1}{\rho}) K$$

c) Relation entre les 2 représentations

Δ_1 et Δ_2 sont 2 diamètres conjugués de l'indicatrice .

- Les tangentes en M_ξ et M_η sont respectivement parallèles à Δ_2 et Δ_1
- L'écart type de la distribution rapporté à Δ_1 (distance verticale) est représenté par GM_ξ

- L'écart type de la distribution rapporté à Δ_2 (distance horizontale) est représenté par GM_η .

Variation des différentes pentes en fonction de ρ K positif $\sigma_x > \sigma_y$

ρ	- 1	0	+ 1
$\text{tg } 2\alpha$	- 2k 	0	+ 2k 
$\text{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)$	- 2 k 	$-\infty$ $+\infty$ 	+ 2k
$\text{tg } \alpha_1$	- k'	0	k'
$\text{tg } \alpha_2$	- k'	$-\infty$ $+\infty$	k'
α	- Arctg k' 	0	+ Arctg k' 
α_Δ	- Arctg k' 	$-\frac{\pi}{4}$ $+\frac{\pi}{4}$ 	+ Arctg k'

Représentation graphique

Nous avons porté sur 2 graphiques $\rho = 0,7$ et $\rho = 0,6$ les 2 modes de représentations avec $t = 2$

Interprétation :

Supposons la distribution normale.

Dans l'ellipse se trouvent plus de 85 % des points

Dans la bande de Δ_1 se trouvent plus de 95 % des points

Dans la bande de Δ_2 se trouvent plus de 95 % des points.

L'axe de la distribution est le grand axe de l'ellipse.

On remarque que pour de fortes valeurs de ρ la droite la plus proche de l'axe entre Δ_1, Δ_2 et leur bissectrice est Δ_1 : $\eta = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ $\sigma_x > \sigma_y$

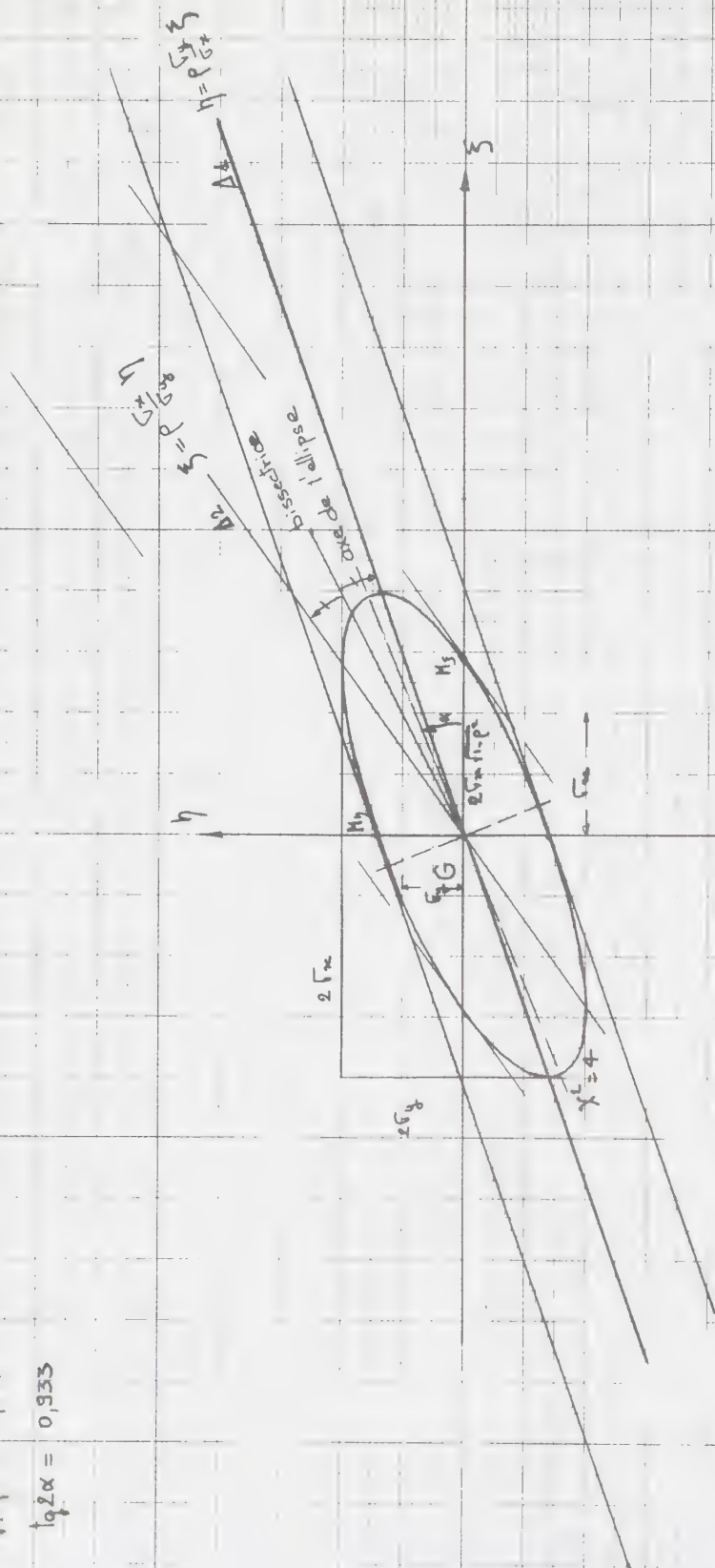
D'autre part la bande de probabilité de Δ_1 est plus étroite que celle de Δ_2 .

Outre la représentation par les ellipses ou les droites des moindres carrés, on pourra utiliser la représentation plus parlante de Δ_1 avec sa bande de dispersion.

$$\rho = 0,7$$

$$\sqrt{1-\rho^2} = 0,714$$

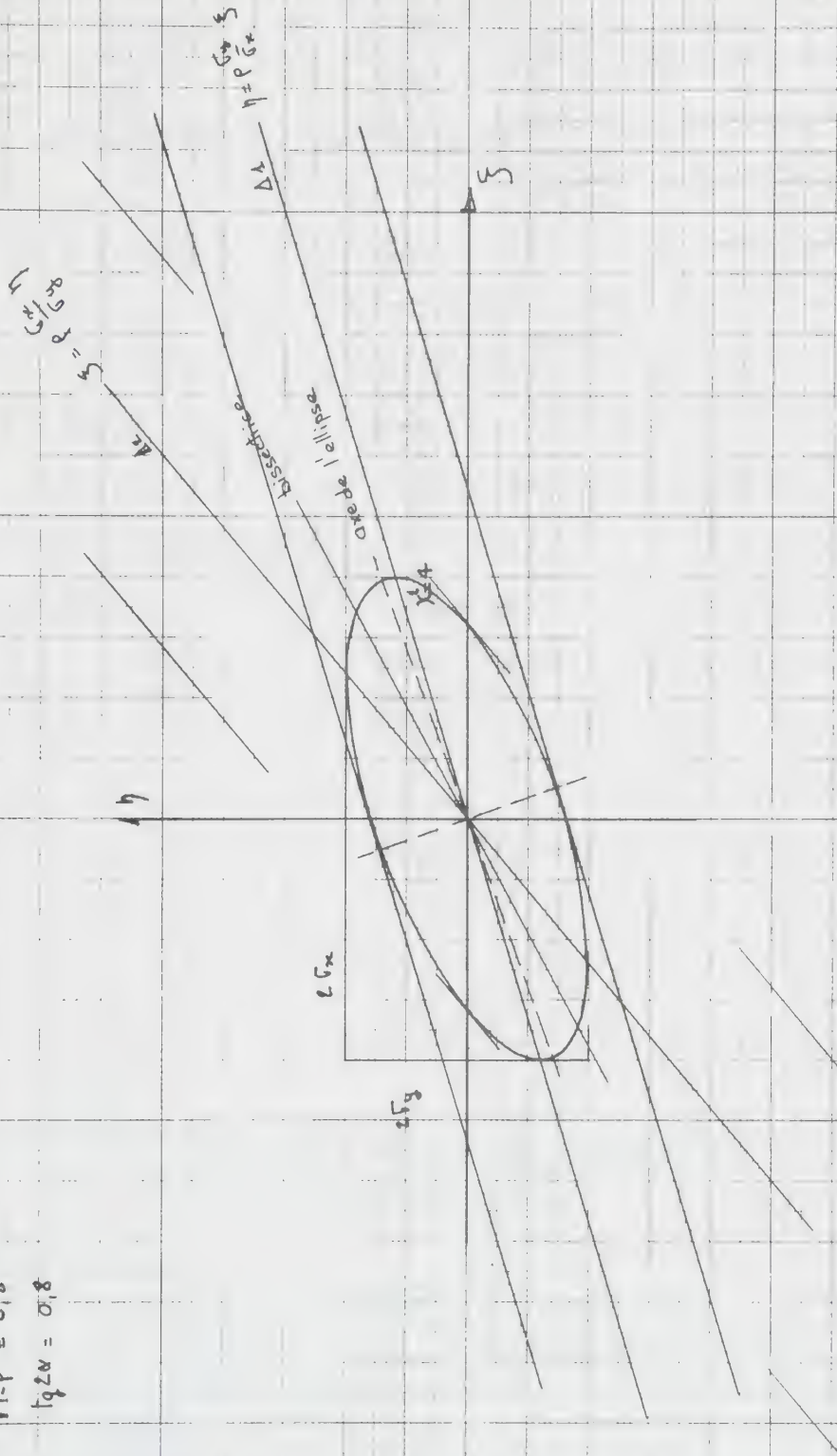
$$\lg 2\alpha = 0,933$$



$$\rho = 0,6$$

$$\sqrt{1-\rho^2} = 0,8$$

$$\tan 2\alpha = 0,8$$



Nous choisirons alors pour η la variable qui a le plus petit écart type.

II.II.2.2 - Signification d'un coefficient de corrélation

Soit ρ le coefficient de corrélation d'une population et r celui déterminé à partir d'un échantillon de n couples extraits de cette population.

r n'est qu'une estimation de ρ , il convient de tester son degré de signification.

a) Test de l'hypothèse $\rho = 0$

Dans l'hypothèse où x et y sont normales et indépendantes ($\rho = 0$) la probabilité pour que r dépasse la valeur de $r_\alpha(v)$ est donnée par la table ci-dessous

$$P \left\{ r \geq r_\alpha(v) \mid \rho = 0 \right\} = \alpha \quad v = n - 2$$

Exemple : soit pour $n = 19$ $v = 17$
 $r = 0,61$

$$P \left\{ r \geq 0,5751 \mid \rho = 0 \right\} = 0,01$$

Dans l'hypothèse $\rho = 0$ il existerait moins d'une chance sur 100 d'obtenir $r \geq 0,61$: La corrélation est quasi certaine.

b) Limites de confiance correspondant à une estimation r

Cette détermination est basée sur l'étude de la variable auxiliaire très approximativement normale (R.A. Fisher): z

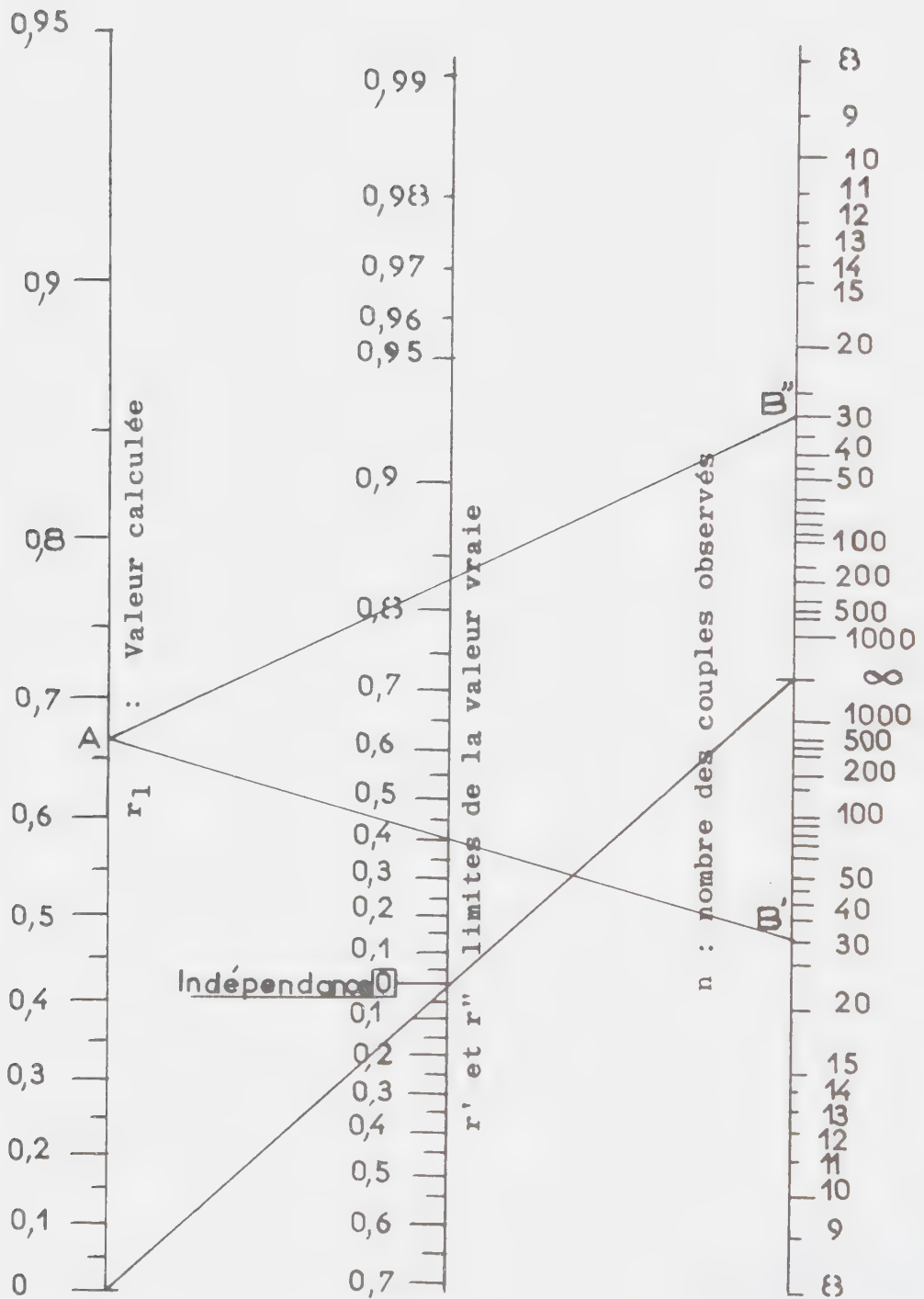
$$z = \frac{1}{2} \log_e \frac{1+r}{1-r} \quad \text{de paramètre} \quad \left| \begin{array}{l} E[z] = \frac{1}{2} \log \frac{1+\rho}{1-\rho} \\ \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} \end{array} \right. \quad (\text{indépendant de } \rho)$$

On pourra procéder par le calcul en étudiant l'intervalle $E[z] \pm t \sigma_z$; pour un seuil de confiance de 0,95 ($t=1,96$) nous donnons l'abaque ci-dessous.

Dans l'exemple précédent, on trouve $P \left\{ 0,2165 < \rho < 0,8337 \right\} = 0,95$.

SIGNIFICATION D'UN COEFFICIENT DE CORRELATION

$\frac{p}{\alpha}$	$0,1$	$0,005$	$0,02$	$0,01$	$0,001$	$\frac{p}{\alpha}$	$0,1$	$0,05$	$0,02$	$0,01$	$0,001$
1	0,98769	0,99622	0,999507	0,999877	0,9999988	16	0,4000	0,4683	0,5425	0,5897	0,7084
2	0,90000	0,95000	0,98000	0,990000	0,99900	17	0,3887	0,4555	0,5285	0,5751	0,6932
3	0,8054	0,8783	0,93433	0,95873	0,99116	18	0,3783	0,4438	0,5155	0,5614	0,6787
4	0,7293	0,8114	0,8822	0,91720	0,97406	19	0,3687	0,4329	0,5034	0,5487	0,6652
5	0,6694	0,7545	0,8329	0,8745	0,95074	20	0,3598	0,4227	0,4921	0,5368	0,6524
6	0,6215	0,7067	0,7887	0,8343	0,92493	25	0,3233	0,3809	0,4451	0,4869	0,5974
7	0,5822	0,6664	0,7498	0,7977	0,8982	30	0,2960	0,3494	0,4093	0,4487	0,5541
8	0,5494	0,6319	0,7155	0,7646	0,8721	35	0,2746	0,3246	0,3810	0,4182	0,5189
9	0,5214	0,6021	0,6851	0,7348	0,8471	40	0,2573	0,3044	0,3578	0,3932	0,4896
10	0,4973	0,5760	0,6581	0,7079	0,8233	45	0,2428	0,2875	0,3384	0,3721	0,4648
11	0,4762	0,5529	0,6339	0,6835	0,8010	50	0,2306	0,2732	0,3218	0,3541	0,4433
12	0,4575	0,5324	0,6120	0,6614	0,7800	60	0,2108	0,2500	0,2948	0,3248	0,4078
13	0,4409	0,5139	0,5923	0,6411	0,7603	70	0,1954	0,2319	0,2737	0,3017	0,3799
14	0,4259	0,4973	0,5742	0,6226	0,7420	80	0,1829	0,2172	0,2565	0,2830	0,3568
15	0,4124	0,4821	0,5577	0,6055	0,7246	90	0,1726	0,2050	0,2422	0,2673	0,3375
						100	0,1638	0,1946	0,2301	0,2540	0,3211



Zone d'indétermination du coefficient de corrélation.

c) Vérifier que 2 coefficients de corrélation ne diffèrent pas systématiquement

Soit un 1er échantillon $n_1 = 28$ $r_1 = 0,80$ } peuvent ils appartenir à la
 2ème échantillon $n_2 = 13$ $r_2 = 0,50$ } même population

On utilise la variable auxillaire z_1 et z_2

On étudie la variance de $z_1 - z_2$.

$$\sigma_{(z_1 - z_2)}^2 = \sigma_{z_2}^2 + \sigma_{z_1}^2 = 0,374$$

Si $\rho_1 = \rho_2$ la différence $z_1 - z_2$ peut atteindre $\pm 1,96 \times 0,374 = \pm 0,733$
 ici $z_1 - z_2 = 0,55 < 0,733$: on ne peut rejeter l'hypothèse

Dans ces conditions on peut chercher une nouvelle estimation

$$\bar{z} = \frac{(n_1 - 3) z_1 + (n_2 - 3) z_2}{n_1 - 3 + n_2 - 3} = 0,943 \quad \text{soit } r = 0,736$$

et un intervalle de confiance (seuil à 0,95) $0,547 < \rho < 0,855$ $n = 41 - 3$

II.II.2.3 - Les différents types de corrélations

Nous cherchons, par l'étude de corrélations, avant tout à obtenir des paramètres rhéologiques en fonction de paramètres d'identification.

La première tâche est de dégager les paramètres d'identification les plus intéressants, et de voir les corrélations qui les lient.

a) Paramètres physiques - Corrélations entre paramètres d'identification

Les paramètres les plus couramment utilisés sont γ_d , F (% Filler), I_p , U.

La phase liquide peut être caractérisée par w et S_r .

De l'avis général, la densité sèche n'est pas un paramètre opérant, il ne peut être utilisé seul. On est plus enclin à penser que l'indice de compacité I_D est plus caractéristique. Malheureusement, il nécessite 2 mesures de plus : celles de e_{min} et de e_{max} .

Il doit être possible de les obtenir statistiquement en fonction de caractéristiques granulométriques comme F, U, ou autres à définir.

Nous chercherons à définir des lois statistiques comme :

$$I_D = f(U, \gamma_d, F) \text{ pouvant inclure des termes correctifs comme } I_p, C_c.$$

Dans les caractéristiques Proctor la même étude pourra s'engager. ANQUETIL et CAMBOU, dans un projet de fin d'études à l'ECL ont remarqué que γ_{dOP} et W_{OP} ne dépendaient pas seulement d'un paramètre granulométrique ou de cohésion.

Ils n'ont commencé à obtenir de résultats satisfaisants qu'avec un paramètre granulométrique complexe ($\frac{\sum}{n}$ = le facteur de SCHON) et W_L .

Ils ont, au Laboratoire de Mécanique des Sols cherché des corrélations à 3 paramètres. L'essentiel de ces résultats figure dans la 4ème Partie.

Il y a donc à rechercher : e_{min} , e_{max} , γ_{dOP} , W_{OP} (normal ou modifié), $f(C_u, F, \frac{\sum}{n})$, I_p , C_c , relation entre γ_{dOPn} et γ_{dOPm} , $\gamma_{dOPm}/\gamma_{dOPn}$

Pour les sols cohérents, il y a à vérifier ou préciser certaines lois:

$$I_p = 0,73 (W_L - 0,2) = \alpha (W_L - \beta)$$

α et β dépendent de quels paramètres ? minéralogie, retrait.

$$I_p = f(F)$$

$$W_s = f(I_p \text{ ou } W_L \text{ ou } W_p)$$

Enfin, il y a lieu de tester la corrélation possible entre I_L et I_D .

En résumé, on dispose :

1°) de paramètres de nature appelés paramètres d'identification qui sont :

- la nature minéralogique d'une part,
- la granulométrie d'autre part dans laquelle on considère comme les plus utilisables les paramètres F, U, rugosité de surface, angulosité,

2°) de paramètres de géométrie d'ensemble γ_d (ou e), W.

Les paramètres de nature ainsi définis nous les appelons les paramètres de nature statique- il définissent la nature du matériau au "repos" - par contre si on fait subir au matériau des déformations et sollicitations particulières, on pourra mettre en évidence des paramètres rhéologiques , mais on pourra mettre en

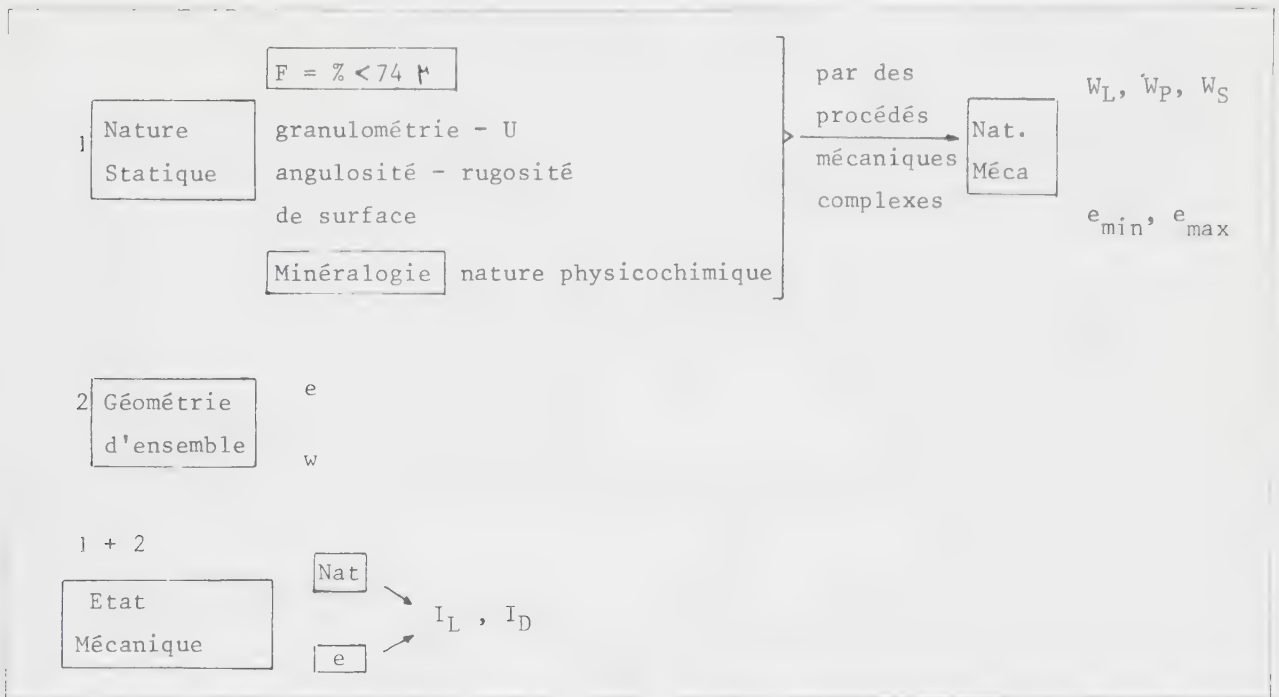
évidence des paramètres que nous appellerons de nature mécanique ne devant dépendre que des paramètres statiques.

C'est le cas pour les mesures des limites d'Atterberg et des compacités minimale et maximale où le matériau est détruit puis reconstitué pour les besoins de l'expérience.

Nature mécanique et géométrie d'ensemble définissent l'état mécanique du matériau : 2 paramètres sont essentiels :

$$I_L = \frac{W - W_P}{W_L - W_P} \quad \text{ou} \quad I_C = \frac{W_L - W}{W_L - W_P}$$

$$\text{et} \quad I_D = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}}$$



Pour conclure sur ces paramètres d'état, on peut proposer de nouveaux paramètres de nature plus complexes.

En particulier :

$$W_{Lf} = W_L (1 - F^n)$$

$$W_{Pf} = W_P (1 - F^n)$$

$$P_{If} = P_I (1 - F^n)$$

$$= W_{Lf} - W_{Pf}$$

avec $n = 3 ?$

Proportions qui ne démentent pas les études de Cambou et Anquetil sur le Proctor normal.

b) Paramètres rhéologiques

Monsieur BIAREZ avec le concours des chercheurs du laboratoire, et principalement de M. FLAVIGNY, a fait le point des connaissances acquises sur les propriétés mécaniques des sols, et avancé un certain nombre de lois rhéologiques et lois de comportement.

Il a classé les sols en 3 catégories du point de vue des propriétés mécaniques :

- les milieux pulvérulents,
- les argiles saturées drainées
non drainées
- les argiles non saturées.

Nous reproduisons ci-après la note où sont consignées ces connaissances.

PROPRIETES MECANQUES DES SOLS

<u>But</u>	Connaitre les contraintes et les déformations en chaque point d'un massif de sol.
<u>Méthode</u>	Mécanique des milieux continus: -hypothèse de la continuité pour définir les contraintes et les déformations (σ, ϵ) -données : lois générales de l'équilibre • lois particulières (loi de comportement) • sollicitations sur le contour (forces, déplacements,...) • sollicitations à distance (force de volume)
<u>Formulation des propriétés mécaniques (loi de comportement, loi rhéologique)</u>	C'est une relation entre les chemins dans les espaces contraintes et déformations gradués en temps et température. Souvent cette relation est simplifiée: - lois biunivoques, réversibilité; élasticité, viscosité. - lois partielles: élasticité, plasticité, viscoplasticité. Il faut alors définir les limites de validité des lois : limite élastique $f(\sigma_y)=0, \dots$; - lois sur des chemins simples: isotrope, déviatoire.. - loi de plasticité parfaite ou pour de grandes déformations: elle ne dépend pas des chemins suivis antérieurement. Pour un milieu polyphasique comme le sol, on peut aussi simplifier en écrivant des lois par phases et les lois interphases ($\sigma = \sigma', \alpha, \dots$, loi de Henry..)
<u>Principes de mesure</u>	• Homogénéité de la loi, des contraintes et déformations. ⁽¹⁾ • Reproduire dans l'éprouvette les chemins réels.
<u>Types d'essais</u>	- pour chercher une loi. - pour chercher les paramètres d'une loi postulée. - essais semi-empiriques: corrélations entre des mesures (pénétromètre, Prinnell, Atterberg) - essais empede ou vraie grandeur. - essais sur les particules constitutives et corrélation avec les propriétés mécaniques.

(1) Essais triaxiaux sans fretage aux extrémités de l'éprouvette par exemple .

Corrélations entre les propriétés mécaniques du milieu continu fictif et les propriétés des particules

Les premières dépendent des secondes, mais on peut directement mesurer les premières -sauf si les particules sont trop grosses-. La connaissance des secondes est utile pour le raisonnement ou les corrélations, mais n'est pas nécessaire.

Propriété des particules.

- propriétés mécaniques
- géométrie: compacité: ϕ , γ_d , w_d , n
forme: dimension, angularité, rugosité.
- propriétés physiques et chimiques:
minéralogie (en relation avec les limites d'Atterberg)
propriétés du liquide interstitiel (ions)

Les corrélations avec les limites d'Atterberg ne peuvent être retenues que pour les matériaux de dimension $< 0,4 \text{ mm}$.

Ecrouissage

C'est la modification des propriétés mécaniques par une déformation irréversible.

Les propriétés mécaniques sont définies pour un chemin donné de sollicitations ou chemin d'utilisation

L'écrouissage est défini par le chemin de déformation irréversible ou chemin d'écrouissage. Si l'on se réfère à un chemin simple connu, on peut parfois caractériser l'écrouissage par la déformation finale: par exemple l'indice des vides e pour un chemin isotrope ou la contrainte maximale subie dans l'histoire: "contrainte de consolidation" ou "contrainte d'écrouissage".

Anisotropie continue

Les particules peuvent présenter une orientation particulière: anisotropie de l'assemblage

Anisotropie discontinue

C'est en général une fissuration dans une direction privilégiée. ($\epsilon \neq \bar{\epsilon}$, $\epsilon \neq \bar{\epsilon}$)

Propriétés du gaz

On emploie la loi de Mariotte: $p \cdot v = rT$

(élasticité isotrope non linéaire) $E_v = \frac{dp}{dv} = -p$

Propriétés de la phase liquide

- loi rhéologique de l'eau: viscosité newtonnienne linéaire ($\sigma_d = 2\mu \dot{\epsilon}_d$) d'où les équations de Navier-Stokes.

Ces équations appliquées à un milieu poreux donnent la loi de Darcy: $v = K L$ proportionnalité de la vitesse et du gradient hydraulique. Comme pour l'écoulement dans un tuyau, le débit est proportionnel au carré de la dimension des vides: $K \propto d_{10}^2$ (d_{10} : caractéristique granule échantillon). Pour un sol donné, la perméabilité décroît si la contrainte augmente.

Représentation simplifiée des chemins et des lois

On se contente souvent de représenter les chemins dans les espaces $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ en indiquant par ailleurs l'orientation de ces tenseurs par rapport au corps. Dans de nombreux cas le changement d'orientation pendant l'essai peut être négligé.

On sépare aussi en partie isotrope $\bar{\sigma}_d, \bar{\epsilon}_d$ et déviatoire $\bar{\sigma}_d, \bar{\epsilon}_d$; on représente souvent $\bar{\sigma}_d$ par le scalaire $q = \sigma_1 - \sigma_3$ ou $\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$: le rôle de la contrainte intermédiaire σ_2 étant faible en plasticité parfaite. La partie isotrope se représente selon les auteurs par $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ ou $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_m$.

La déformation isotrope ϵ_d est souvent remplacée par la variation d'indice des vides e .

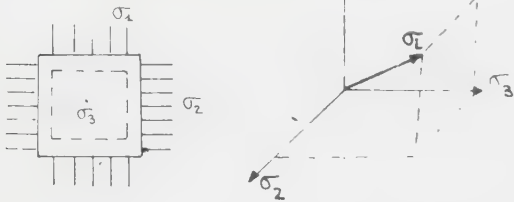
Pour une sollicitation dans l'espace $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ on peut examiner la réponse sur $\bar{\epsilon}_d$ et ϵ_d ou e séparément. D'où des représentations partielles et simplifiées des lois dans les espaces (σ_1, σ_3, e) ou (p, q, e) .

En plasticité parfaite drainée -avec rôle négligeable des vitesses- les grandes déformations effacent le passé: les chemins suivis n'interviennent plus et l'on peut avoir une loi partielle assez correcte sous forme d'une surface dans les espaces (p, q, e) ou (σ_1, σ_3, e) . Le reste de la loi consiste à préciser $\bar{\epsilon}_d$.

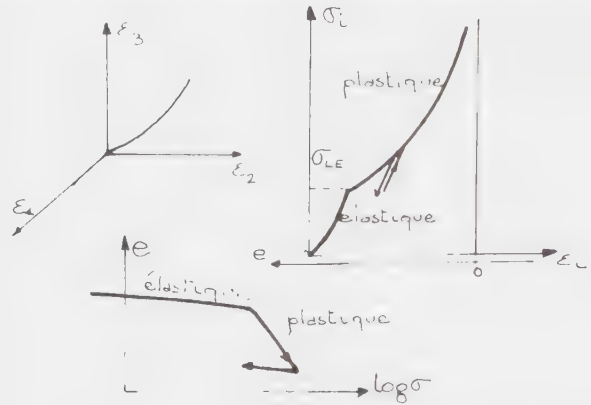
PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DES MILIEUX HÉTÉROGÈNES

SOLLICITATIONS

Chemin isotrope en contrainte



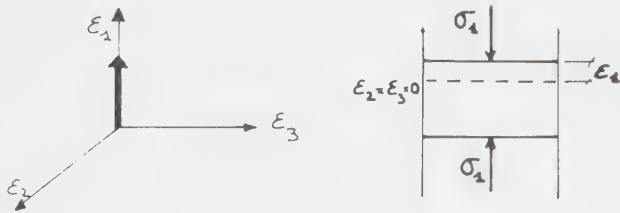
RÉPONSES



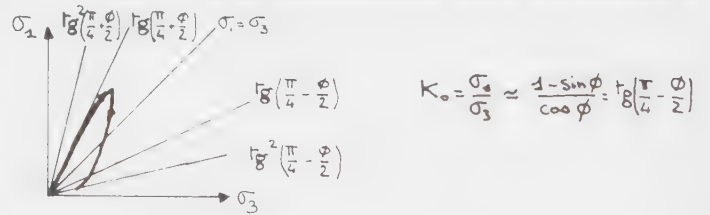
-loi non linéaire élastique
plastique

-une granulométrie étalée augmente σ et la limite élastique.

Chemin isotrope en déformations



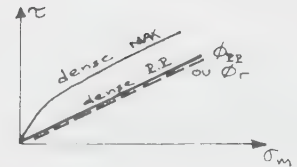
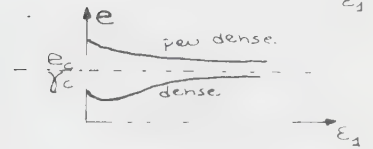
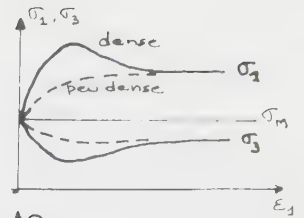
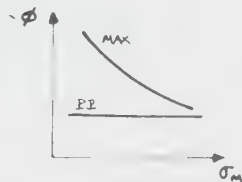
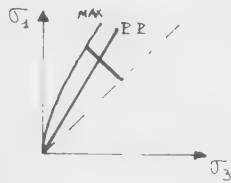
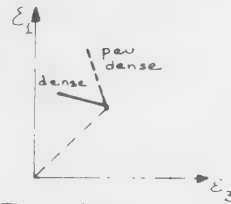
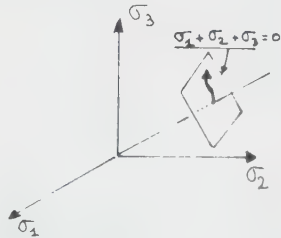
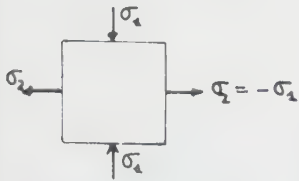
Diagrammétrie.



- la réponse en ϵ - $\log \sigma$ est peu différente de ci-dessus.

Chemin déviatoire en contrainte

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$



-élasticité: $\bar{\sigma}_d = E_d \bar{\epsilon}_d$

-un déviateur de contrainte produit une variation de volume:

sol dense - dilatation

sol peu dense - tassement

-pour les faibles contraintes on a

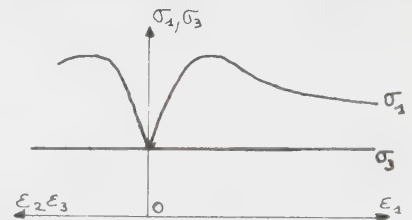
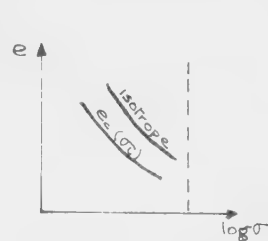
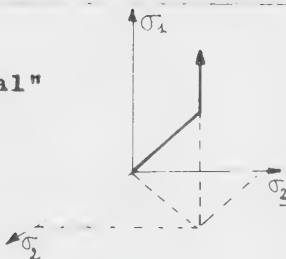
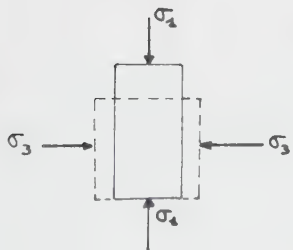
$$\tan \phi = \frac{K}{e} \quad K \approx 0,4 \quad \text{roulé}$$

$$30^\circ < \phi < 40^\circ \quad \text{roulé}$$

$$35^\circ < \phi < 45^\circ \quad \text{anguleux}$$

-les propriétés de grandes déformations (ϕ_R) ne dépendent pas du passé ($e...$) et la compacité finale ne dépend que de σ

Chemin "triaxial"



-réponses voisines de ci-dessus

-loi de plasticité parfaite: $f(\sigma_1) = K$ en contrainte

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad \tau = \sigma_n \tan \phi$$

cinématique $e_c(\sigma) \approx \gamma_c(\sigma)$

S'il n'y a pas de rotation, on a -semble t'il- mêmes directions principales des tenseurs σ et ϵ , et similitude des déviateurs σ_d et ϵ_d dans un rapport quelconque.

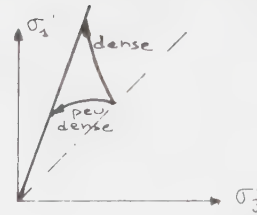
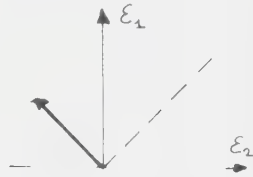
Solicitations

Réponses

Chemin déviatoire en ε
(sans rotation)

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

$$\Delta V = 0$$



Une déformation sans variation de volume -ou déviateur de déformation- crée une variation de la contrainte isotrope: par exemple un sable fin saturé peu dense se "liquéfie" par tremblement de terre

Chemin déviatoire en ε
(avec rotation)



Déformation plane

L'angle de frottement mesuré est légèrement plus grand que celui du "triaxial" (13 à 10 %)

Chemin avec surface de discontinuité



La surface de discontinuité permet un arrangement des particules à faces planes: dans ce cas ϕ est diminué.



Ecrouissage des matériaux pulvérulents

- Déformation irréversible déviatoire

- modifie la limite élastique, peu E et non ϕ_{max} et ϕ_{II} .
- crée une anisotropie de limite élastique (effet Bauschinger généralisé).
- la limite et la réversibilité sont plus nettes si les chemins d'écrouissage et d'utilisation sont plus voisins.
- on peut définir des surfaces d'égale réversibilité.
- on crée une légère anisotropie des modules, plus forts pour les chemins voisins.
- on peut créer un comportement très sensiblement élastique même pour de grands déviateurs, pour certains chemins.
- l'anisotropie mécanique correspond à une anisotropie de géométrie statistique de l'ossature; celle-ci demeure constante en plasticité parfaite, et change d'orientation s'il y a rotation des tenseurs.

- Déformation irréversible isotrope

- modifie la limite élastique, E , ϕ_{max} et non ϕ_{II}

Cycles de contraintes

- chaque cycle produit de petites déformations irréversibles, qui peuvent parfois écraser les particules.

Pour être drainées, les argiles nécessitent des faibles vitesses de déformation, fonction du carré des distances de drainage: exemple à l'oedomètre, $h=15\text{mm.}$, $t>2\text{h.}$

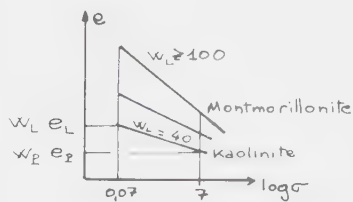
Les argiles drainées ont un comportement analogue aux milieux pulvérulents sauf:

- 1) cohésion : il existe une "colle" entre les grains due au liquide adsorbé sur les cristaux de silicates formant les particules. En général ce lien n'est pas détruit par les grandes déformations.
- 2) thixotropie : il arrive que ces liens décroissent avec les grandes déformations, et se reconstituent avec le temps, surtout pour les argiles à $w_L > 50$
- 3) sensibilité : c'est une perte de résistance pour de grandes déformations due à l'instabilité de la structure.
- 4) role des vitesses de déformation et de contraintes sur l'ossature du sol due au liquide adsorbé
- 5) perméabilité petite: $K < 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ d'où la forte influence des temps d'écoulement et le retard de la compressibilité isotrope (consolidation hydraulique).

SOLICITATION

REIONSE

Chemin
isotrope



e_L et e_P correspondent à 0,07 et 7 bars environ.

$$\text{La pente } C_c = - \frac{e - e_L}{\log \frac{\sigma}{\sigma_L}}$$

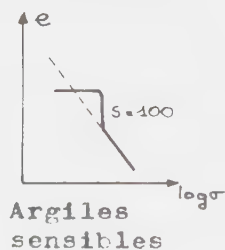
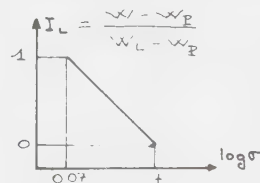
Le chemin plastique correspond à

$$E' \approx 10 \sigma_c \quad E' = \frac{1}{m}$$

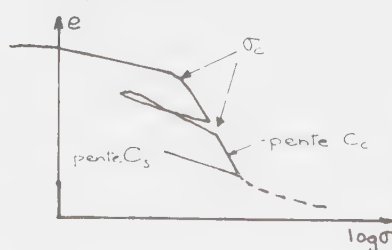
Le gonflement du à la décompression se fait selon une loi voisine de la compression élastique sauf pour le retour aux faibles contraintes si la compacité initiale était forte.

$$C_s = C_g = \frac{C_c}{4}$$

Chemin
oedométrique



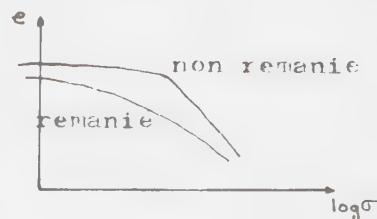
Argiles
sensibles

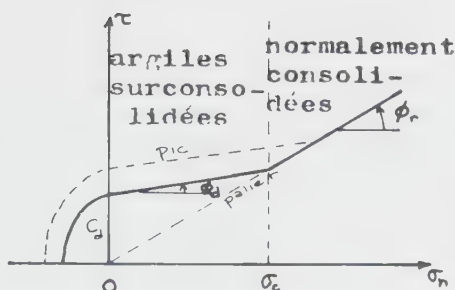


L'argile remaniée est plus compressible. non rem $C_c = 0,009 (w_L - 10)$

$$\text{rem. } C_c = 0,007 (w_L - 10)$$

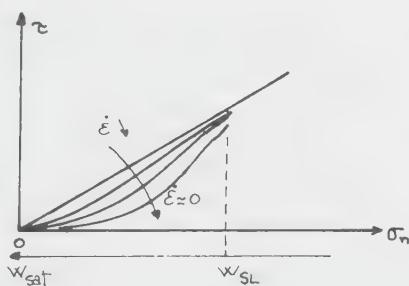
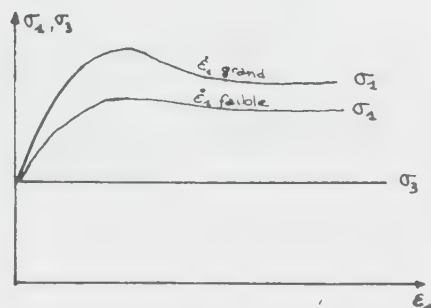
Les argiles sensibles, comme les billes de verre, montrent une chute brusque après le coude de surconsolidation: ceci est du à l'écrasement de la structure ou des billes.



Chemin
déviatoire en σ Chemin
triaxial

$$C_d = 7 \left(\frac{w_L - w}{w_L - 10} \right)^5$$

argiles surconsolidées



ϕ résiduel ou ϕ_{re} décroît si w_L croît (cf. tableau ci-dessous)

C_d croît avec la compacité et d'une manière sensiblement linéaire avec σ_c

Le palier de plasticité parfaite correspond à $C_d = 0$.

La fragilité ou chute pic-palier croît avec la surconsolidation. $f = \frac{\sigma_{max} - \sigma_3}{\sigma_{pe} - \sigma_3}$

Visco-plasticité

Pour l'argile normalement consolidée:

$w < w_{SL}$ peu d'influence de $\dot{\epsilon}$ car il y a peu d'eau adsorbée entre les particules.

$w > w_{SL}$ forte influence de $\dot{\epsilon}$. Il existe probablement plusieurs courbes intrinsèques pour divers $\dot{\epsilon}$.

Pour l'argile surconsolidée, il y a peu d'influence de $\dot{\epsilon}$ pour $w < w_{SL}$.

Visco-élasticité

Les modules sont fonction de $\dot{\epsilon}$

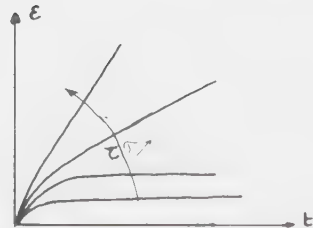
ϕ_r	6°-12°	15°	25°
I_P	> 40	> 20	10
w_L	> 70	> 50	35

Rôle du temps

Fluage

- * [solicitation isotrope
solicitation oedométrique : c'est la consolidation
"secondaire" qui s'exprime par $\varepsilon_c = \alpha \log t$

α croît avec w_L , est important pour les tourbes.

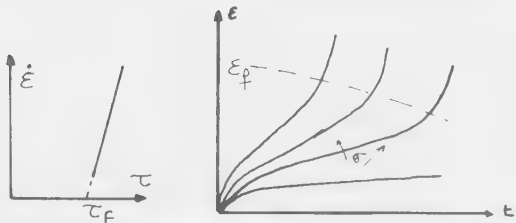


Argiles normalement consolidées

- * [solicitation déviatoire: on met en évidence un seuil de fluage ; plastique: valeur de τ à partir de laquelle on obtient une déformation infinie.

$\tau < \tau_f$ $\varepsilon = \alpha \log t$ ou fini

$\tau > \tau_f$ ε infini



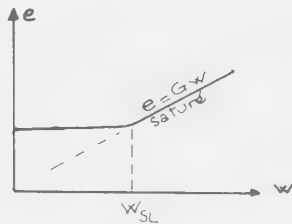
Argiles surconsolidées

Le fluage secondaire à vitesse constante est possible pour un temps indéfini sous état de contrainte homogène, pour les argiles normalement consolidées.

Pour une argile surconsolidée, la rupture se produit après une certaine déformation à comparer avec la déformation de pic dans un essai triaxial équivalent.

Par exemple: pour la craie, on a $\tau_f \approx \frac{\tau}{2}$ 4 mm/min

Retrait-gonflement avec variation de la pression intersticielle u



Si u décroît par évaporation ou baisse de la nappe, $\sigma = \sigma - u$ croît donc et e décroît. Cette diminution de volume provoque la fissuration.

Pour le sol presque saturé, ceci fait intervenir C_c et C_g . Cette variation de volume croît donc avec w_L comme C_s et C_g . Les sols à $w_L > 50$ y sont particulièrement

sensibles.

Le retrait croît avec w_{SL} ou e pour une teneur en eau finale donnée. Le gonflement augmente si e initial est petit (sol compacté)

En dessous d'une certaine teneur en eau, -limite de retrait- w_{SL} le sol ne se rétracte plus, vraisemblablement par diminution de la couche d'eau adsorbée et rupture de la continuité de la phase liquide.

Montmorillonite	$300 < w_L < 700$	$9 < w_{SL} < 11$	$55 < w_P < 100$
Illite	$80 < w_L < 120$	$15 < w_{SL} < 17$	$45 < w_P < 60$
Kaolinite	$40 < w_L < 60$	$25 < w_{SL} < 30$	$27 < w_P < 37$

Argiles fissurées

Il faut que la fissuration soit petite par rapport aux dimensions de l'éprouvette pour que l'on puisse mesurer valablement les propriétés.

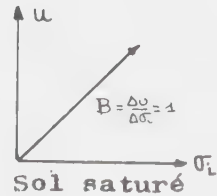
Si la fissuration présente une orientation privilégiée, le résultat dépend de l'orientation du tenseur de sollicitation par rapport à celle de la fissuration ou de la surface de discontinuité imposée (anisotropie). L'étude est difficile si la fissuration est plus grande que l'échantillon. Il faudrait connaître la géométrie réelle de la fissuration et les propriétés mécaniques dans la fissuration. Ce cas se présente dans tous les matériaux cohérents fissurés (roches).

PROPRIETES DES ARGILES NON DRAINEES

Sollicitation

Réponse

Chemin isotrope



La contrainte isotrope s'applique à l'eau interstitielle et au squelette des grains; le sol étant saturé, on a

$$\Delta u \approx \Delta \sigma_v \quad \Delta \sigma'_v = 0$$

Il n'y aura aucune augmentation des propriétés mécaniques avec σ_v donc $\phi_u = 0$

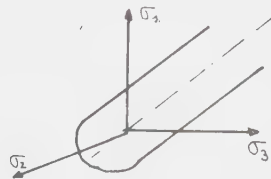
$$\text{On a } B = \frac{\Delta u}{\Delta \sigma_v} = \frac{1}{1 + n \frac{E_s}{E_{uf}}}$$

E_s pour le squelette est négligeable devant celui du fluide: $E_{uf} = 3E_{vf} \approx 60\,000$ bars

Le module isotrope, de même que le module oedométrique, sont infinis.

(sol saturé "incompressible")

Chemin déviatoire en σ_1 ou triaxial

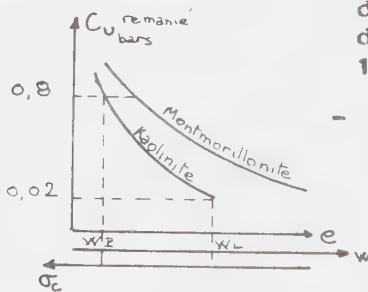
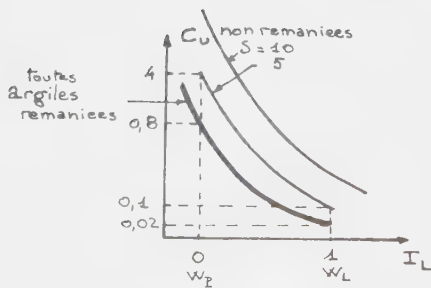


- Sol saturé $\nu = 0,5$
- $E_d \sim E'_d$ à même compacité
- Un déviateur de contrainte modifie la pression interstitielle donc σ' et τ contrairement à l'élasticité linéaire.

$$\phi_u = 0$$

- $C_u = \sigma_c (0,11 + 0,0037 I_L) \approx 0,2 \text{ à } 0,3 \sigma'_c$ (oedométrique)

Il semble que pour les argiles à forte w_L , il soit possible d'avoir des valeurs plus fortes pour de longues périodes de consolidation secondaires (pour les Marine clay, 10 000 ans donnent 50% en plus)



$$C' \approx C_d$$

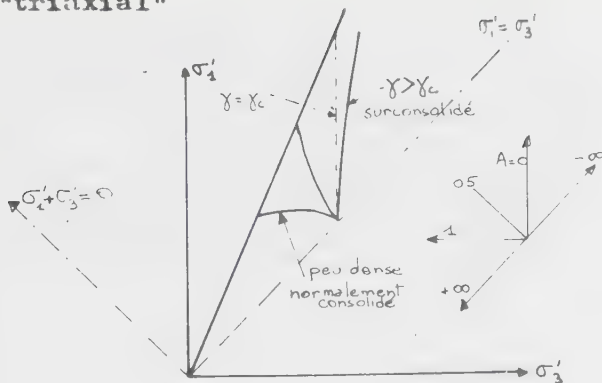
$$\phi' \approx \phi_d$$

Sensibilité

$$S = \frac{C_u \text{ non remanié}}{C_u \text{ remanié}}$$

S	4	7	50	200
I_L	↑	↑	↑	↑
	0,7	1	2	3
	peu sensible	sensible	instable	

Chemin "triaxial"



$$\nu = 0,5 \quad E(\sigma_c)$$

$$\Delta u = B (\Delta \sigma_3 + A(\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3))$$

élastique

$$A = 1/3$$

normalement consolidé, $A_F < 1$ surconsolidé $0 < A_F < 0,5$ argiles sensibles $1 < A_F < 3$

A_F : valeur de A pour de grandes déformations
 B et C croissent avec la vitesse de déformation.

$$\Delta u = \alpha \frac{\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3}{3} + \beta \sqrt{(\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_2)^2 + (\Delta \sigma_2 - \Delta \sigma_3)^2 + (\Delta \sigma_3 - \Delta \sigma_1)^2}$$

- La résistance à l'écrasement $\sigma_1(\epsilon_1)$ est proportionnelle à la contrainte de consolidation σ_c d'où une seule courbe $\frac{\sigma_1}{\sigma_c}(\epsilon_1)$ ou $\frac{\sigma_1 \cdot \sigma_3}{\sigma_c^2}(\epsilon_1)$ pour chaque argile normalement consolidée avec w_L pour caractériser chacune d'où

$$E \approx 400 \sigma_c$$

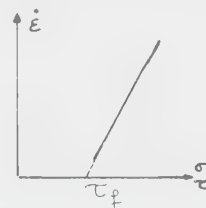
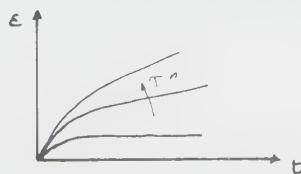
$$C_u \approx \sigma_c' (0,44 + 0,0037 I_{p2})$$

- Quoique sans variation de volume la courbe $\sigma_1(\epsilon_1)$ peut présenter un pic et un palier assez différents, en raison du changement de structure de l'ossature dû aux grandes déformations.

S'il y a surface de discontinuité cinématique il se crée une hétérogénéité de densité et de teneur en eau, et un réarrangement de particules qui peuvent donner une réduction de palier.

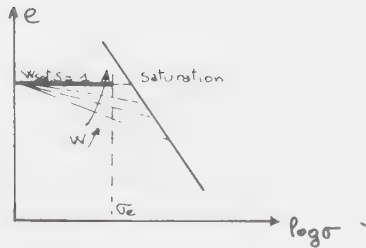
Fluage

- Sous état isotrope ou oedométrique, il ne peut y avoir fluage, pour un sol saturé.
- Sous déviateur, on obtient des courbes analogues à celles du fluage drainé.



PROPRIETES DES SOLS NON SATURÉS NON DRAINÉS

Chemins
isotrope
et
oedométrique



La loi de compressibilité dépend de la teneur en eau initiale et du degré de saturation.

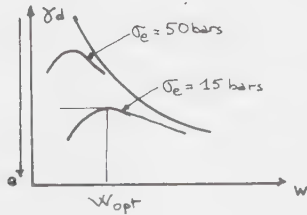
Le sol saturé non drainé (e grand) est incompressible (e constant)

Il existe une teneur en eau initiale optimale pour obtenir le meilleur tassement: ce que met en évidence l'essai Proctor: w_{opt}

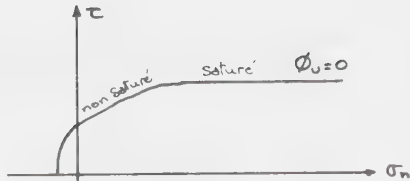
w_{opt} dépend de σ_e

On a $w_{opt} \approx 7 \left(\frac{w_L}{30} + 4 \right)$

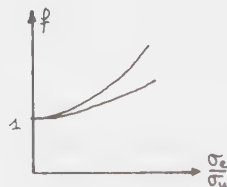
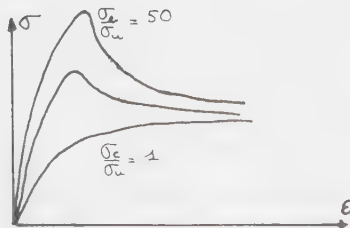
$$\gamma_{dopt} \approx 2,2 - \frac{w_L}{100} \approx 2,1 - \frac{\gamma_w \times 80}{200}$$



Chemins
triaxial



ϕ_u décroît avec la saturation produite par σ_e et devient nul pour σ_e supérieure à la contrainte qui produit la saturation.



La fragilité croît avec le rapport des contraintes d'écroutissage aux contraintes d'utilisation.

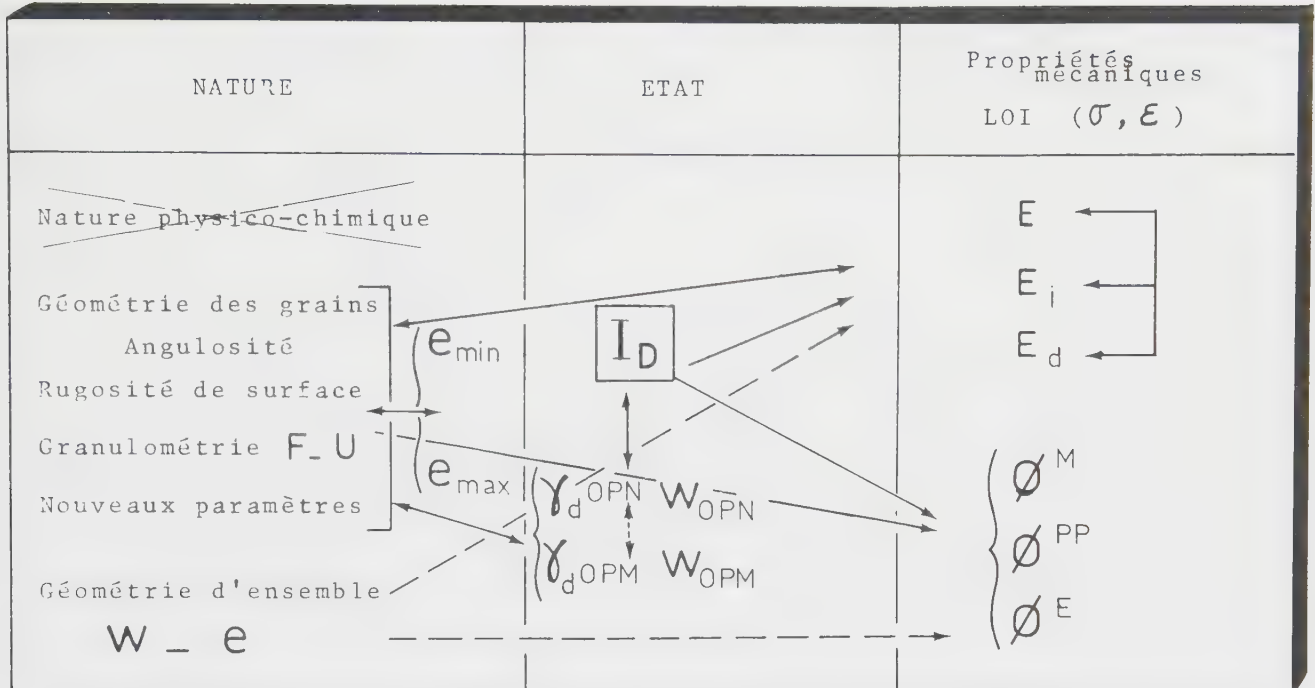
NOTATIONS

A	coefficient caractérisant l'évolution de la pression interstitielle.
C_c	coefficient de compressibilité
$C_r = C_e$	coefficient de gonflement
C_d	cohésion d'une argile drainée ($C_d = 0$ pour une argile drainée normalement consolidée)
C_u	cohésion non drainée
e	indice des vides (rapport des volumes des vides et des "pleins")
E	module
E	module oedométrique E
f	fragilité
K_0	"coefficient des terres au repos"
γ_d	masse spécifique "sèche"
ϕ	angle de frottement
σ_c	contrainte de consolidation: la plus grande contrainte qu'a subi l'échantillon dans son histoire.
w_L, w_p, w_s	limites d'Atterberg caractérisant les différents comportements d'un échantillon de sol remanié.
α	sensibilité

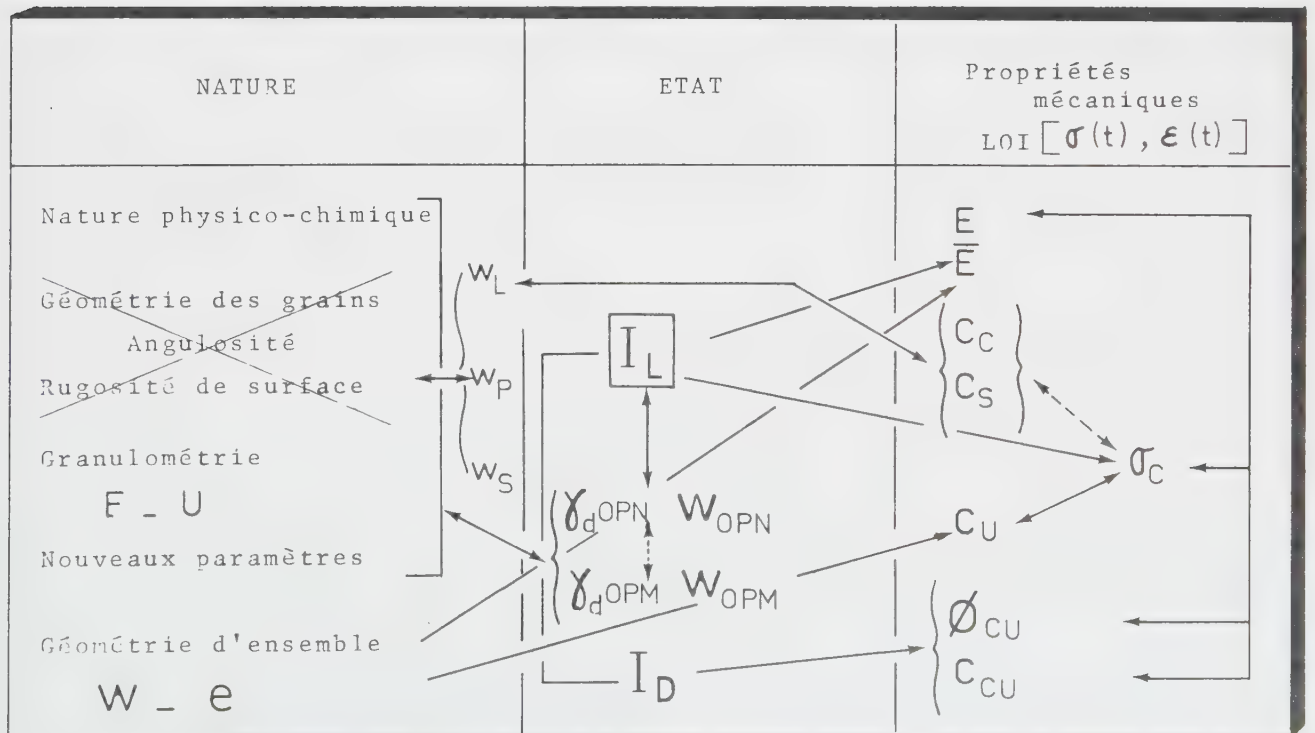
Les différents résultats avancés et lois expérimentales que proposent cette note forment pour nous le point de départ d'une étude statistique ; il nous faut vérifier la valeur de chaque proposition et chiffrer la confiance à lui accorder.

Nous avons consigné dans le tableau synthétique ci-contre les principales corrélations à étudier. Sont indiquées d'une flèche en trait plein les corrélations principales, corrélations à 2 paramètres le plus souvent.

milieux pulvérulents



milieux cohérents



II. II.3 - Influence de la dispersion des données sur les résultats de calcul

Le calcul de probabilité statistique est un instrument, un outil mathématique; le véritable problème n'est pas de le connaître, c'est de savoir l'appliquer.

Autrement dit, il s'agira toujours pour nous de poser le problème en Mécanicien des Sols et non en Mathématicien de probabilités statistiques.

problèmes

Pour illustrer cette idée nous allons traiter 2 petits schématiques. Ensuite nous présenterons 2 problèmes de Mécanique des Sols en essayant de montrer l'application des probabilités statistiques que l'on peut faire.

II.II.3. 1 - Schémas théoriques

a) Maillon le plus faible

Soit $N + 1$ pièces métalliques rendues solidaires par N films de colle ; on exerce sur cet empilement, une force de traction F . On s'intéresse à la rupture de la pile.

Hypothèses simplificatrices

Chaque film de colle est soumis à la sollicitation F , soit une contrainte de rupture à la traction de $\sigma_0 = F/S$, S : surface de la pièce.

Nous supposons que σ_0 est le même pour tous les collages et est appliqué instantanément à tous.

Rupture

C'est le collage le plus faible qui détermine la rupture. Soit $\sigma_{i\text{rupt}}$ la contrainte de rupture à la traction du film i .

Ce n'est donc pas l'étude des $\sigma_{i\text{rupt}}$ qui nous intéresse, c'est la connaissance du $\sigma_{i\text{rupt}}$ le plus petit.

Autrement dit, il y aura rupture si $\inf \{ \sigma_{i\text{rupt}} \} \leq \sigma_0$

Estimation de $\inf \{ \sigma_{i\text{rupt}} \}$

Supposons que par un procédé non destructif on puisse mesurer le $\sigma_{i\text{rupt}}$ des N films, on connaîtra parfaitement la population de ces N films donc parfaitement le plus petit des σ_{rupt} .

Suivant qu'il est ou non inférieur à σ_0 , on affirmera (Probabilité 1) que la pile rompra ou ne rompra pas.



Supposons maintenant qu'on ne dispose pas d'un procédé non destructif de mesure des σ_{rupt} .

Nous nous plaçons dans 2 hypothèses :

- 1°/ On connaît parfaitement par de nombreuses expériences antérieures la distribution du σ_{rupt} de tels films,
- 2°/ On ne connaît pas la distribution parfaitement, mais on suppose qu'elle est gaussienne (1) et on va estimer ses paramètres par la connaissance d'un échantillon de taille n .

On connaîtra (voir I.III.3.1 et I.III.3.2, Erreurs d'échantillonnage)

$$\begin{aligned} \text{Prob} \left\{ A \leq E[\sigma_{rupt}] \leq B \right\} &= 1 - \alpha \\ \text{Prob} \left\{ A' \leq \sigma_{rupt} \leq B' \right\} &= 1 - \alpha' \end{aligned}$$

Dans le 1er cas:

Connaissant parfaitement la loi de répartition des σ_{rupt} , $F(\sigma_{rupt})$, on connaîtra la probabilité de tirer un individu tel que $\sigma_{rupt} \leq \sigma_0$.

$$\mathcal{P} = F(\sigma_0)$$

D'après la loi des épreuves répétées (I.II.2.2) la probabilité sur N tirages de voir se réaliser 1 fois $\sigma_{rupt} \leq \sigma_0$ sera :

$$\mathcal{P} = C_N^1 F(\sigma_0) (1 - F(\sigma_0))^{N-1}$$

Dans le 2ème cas :

Nous ne connaissons donc pas la fonction $F(\sigma_{rupt})$ mais nous en avons simplement une estimation.

La probabilité de rupture sera toujours la même =

$$\mathcal{P} = C_N^1 F(\sigma_0) (1 - F(\sigma_0))^{N-1}$$

Nous donnant $\mathcal{P}$ nous connaîtrons donc parfaitement $y = F(\sigma_0)$;

par contre, connaissant y nous ne pourrions avoir qu'une estimation de σ_0 : $\hat{\sigma}_0$

(1) Ou une fonction de σ_{rupt} comme par exemple $\log \sigma_{rupt}$; dans ce cas on reviendra à σ_{rupt} par la fonction inverse.

$$\mathcal{P} \rightarrow y \rightarrow \hat{\sigma}_0$$

Nous avons supposé que σ_{rupt} avait une distribution gaussienne

$$F(\sigma_0) = N\left(\frac{\sigma_{rupt} - m}{\sigma_{rupt}}\right) = y$$

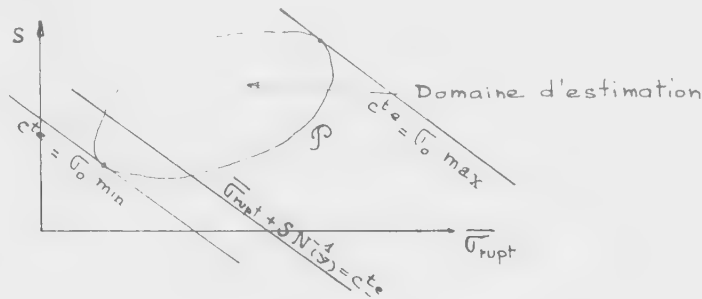
d'où

$$\sigma_0 = m + \sigma N^{-1}(y)$$

N : fonction normale

où m et σ sont estimés par $\overline{\sigma}_{rupt}$ et s

Le problème est donc d'avoir non plus un intervalle d'estimation mais un domaine d'estimation, auquel cas nous aurons le résultat suivant :



Mais il n'existe pas d'estimateur universel de m et σ ; chaque auteur propose un domaine particulier.

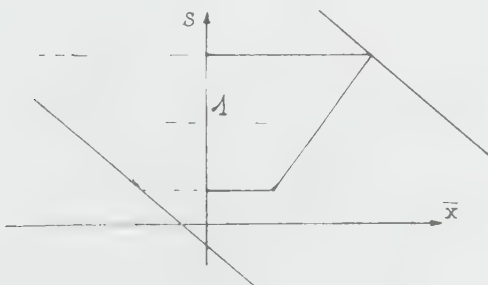
Nous présentons un domaine usuel

$$s \sqrt{\frac{n}{Q_{n-1}^{-1}\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)}} \leq \sigma \leq s \sqrt{\frac{n}{Q_{n-1}^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right)}}$$

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{n} N^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq m \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{n} N^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

avec δ et ε tel que $(1 - \delta)(1 - \varepsilon) = 1 - \alpha$

α étant la probabilité de trouver un point $(\bar{x}, s)$ en dehors du domaine suivant.



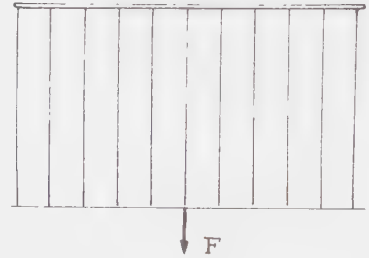
défini à une translation près, m ayant été pris égal à 0 et à une homothétie près, σ ayant été pris égal à 1.

On estimerait ainsi la charge critique X_0 pour laquelle on aurait une probabilité de rupture $\mathcal{P}$.

Le risque d'erreur sur X_0 et la probabilité de rupture n'ont rien à voir entre eux.

b) Effets successifs

Soit N tirants métalliques supportant une force de traction F . On s'intéresse à la rupture de l'ensemble.



Hypothèses simplificatrices

Chaque tirant est soumis à la même sollicitation $\frac{F}{N} = x_0$. Si n_1 tirants rompent les $N - n_1$ restants seront soumis à la même sollicitation x_1 .

Rupture

Il y aura rupture si après application de la charge un nombre tel de tirants rompt que les plus faibles de ceux qui restent ne puissent tenir la nouvelle sollicitation et ainsi de suite jusqu'au dernier ne pouvant tenir F .

Ce n'est pas le tirant le moins résistant qui détermine la rupture, mais l'ensemble des tirants.

Soit donc x la sollicitation de rupture d'un tirant.

Soit n_1 le nombre de tirants pour lesquels $x < x_0$ et qui vont rompre. Il va rester $N - n_1$ tirants soumis à la sollicitation $x_1 = \frac{F}{N - n_1} = \frac{x_0}{1 - \frac{n_1}{N}}$

Soit n_2 le nombre de tirants pour lesquels $x_0 < x < x_1$ et qui vont rompre. Il va rester $N - n_1 - n_2$ tirants soumis à la sollicitation $x_2 = \frac{x_0}{1 - (\frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N})}$

Soit n_i le nombre de tirants pour lesquels $x_{i-2} < x < x_{i-1}$ et qui vont rompre, il va rester $N_1 - n_1 - n_2 - \dots - n_i$ tirants soumis à la sollicitation $x_i = \frac{x_0}{1 - (\frac{n_1}{N} + \dots + \frac{n_i}{N})}$

or :

$$\frac{n_1}{N} + \dots + \frac{n_i}{N} = F(x_i) \quad F \text{ fréquence cumulée de tirants classés}$$

suivant le caractère x

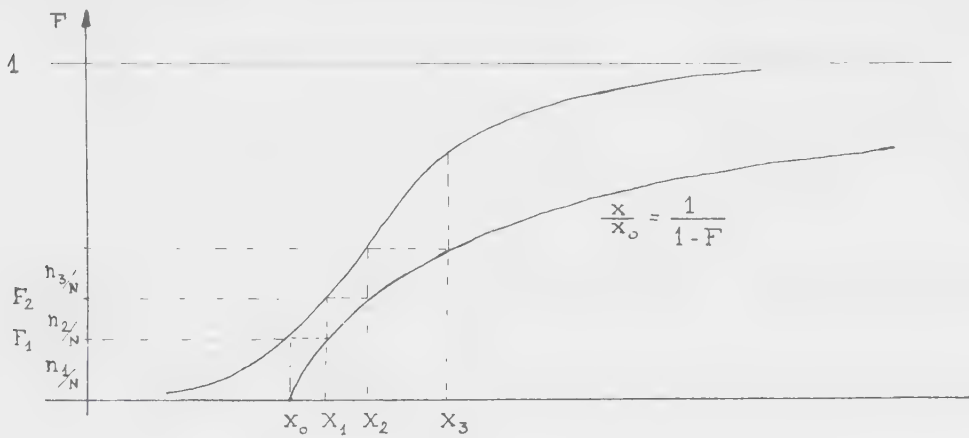
d'où :

$$x_i = \frac{x_0}{1 - F(x_i)}$$

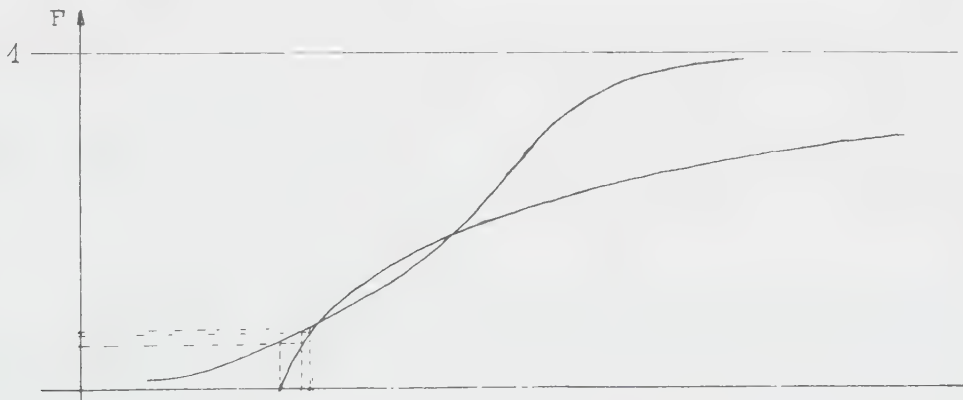
Il y aura rupture si n_i ne prend pas la valeur 0.

Supposons qu'on connaisse le diagramme de répartition de x :

Cas de rupture :



Cas de non rupture



En fait, l'histogramme de répartition est une courbe en palier.

Ecartons tout de suite une objection possible :

Les n_i tirants ne cassent pas tous en même temps. Donc dès que le premier rompt,

la sollicitation n'est plus x_0 mais $x_0 + \varepsilon$, ce n'est donc pas $n_1 - 1$ qui vont rompre maintenant mais plus.

Ceci revient à ne plus avoir de chemin en escalier dans le domaine entre les 2 courbes mais de se déplacer sur la courbe de rupture sans sortir du domaine. Il y aura rupture si le diagramme de répartition et la courbe de charge ne se coupent, c'est-à-dire si l'équation :

$$\text{fonction de répartition} = 1 - \frac{x_0}{x} \quad \text{admet une solution.}$$

Probabilité de rupture

On retrouve exactement le même problème que précédemment : connaissance parfaite des x_i ou estimation.

Pour l'estimation, 2 cas pareillement :

- connaissance de la population d'où sont extraits les N tirants
- estimation de la population d'où sont extraits les N tirants.

Nous appliquerons les mêmes principes de calcul, ce qui ne veut pas dire que ce calcul peut être mené jusqu'au bout à l'heure actuelle.

Examinons le cas où on connaît la population mère.

Soit $x_1, \dots, x_i, \dots, x_{N-1}$, la suite de sollicitations telle que la suite $N \cdot (1 - \frac{x_0}{x_i})$ soit la suite des $N - 1$ premiers entiers (0 exclus).

$$N \cdot (1 - \frac{x_0}{x_i}) = i \quad i = (1, \dots, N - 1)$$

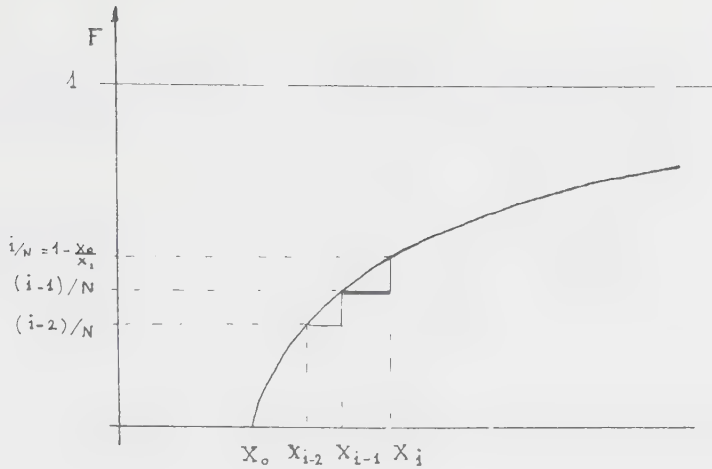
Il y aura non rupture si on tire moins de i tirants de $x_{\text{rupt}} \leq x_i$.

Probabilité de l'évènement : $x_{\text{rupt}} \leq x_i : F(x_i)$

Probabilité d'avoir $i - 1$ tirants parmi N tels que $x_{\text{rupt}} \leq x_i$

$$P_i = C_N^{i-1} F(x_i)^{i-1} (1 - F(x_i))^{N-i+1}$$

On peut faire ce calcul pour chaque x_i .



Sur le graphique ci-dessus, on voit que P_i est la probabilité d'obtenir le palier indiqué en gros trait quelque soit les paliers de histogramme de répartition avant et après.

La non rupture aura lieu si on obtient 1 quelconque de ces paliers pour un quelconque de x_i .

Si l'obtention d'un de ces paliers était exclusive de l'obtention des autres, nous pourrions calculer simplement la probabilité de rupture :

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{N-1} C_N^{i-1} [F(x_i)]^{i-1} \cdot [1 - F(x_i)]^{N-i+1}$$

C'est malheureusement faux.

Prenons deux paliers successifs.

La probabilité d'obtenir le premier (événement P_{i-1}) est p_{i-1} . Pour obtenir l'évènement P_i , il suffit de tirer un tirant de $x_{rupt} < x_i$ parmi les $N-i+2$ qui restent

$$P_i/P_{i-1} \cdot H = C_{N-i+2}^1 F(x_i) (1 - F(x_i))^{N-i+1}$$

Pour déclarer l'obtention d'un palier (P_i/H) exclusive de l'obtention du palier précédent P_{i-1}/H , il faut que $P_i \cdot P_{i-1}/H = 0$
or

$$P_i \cdot P_{i-1}/H = P_{i-1}/H \times C_{N-i+2}^1 F(x_i) (1 - F(x_i))^{N-i+1}$$

qui est différent de zéro.

Voyons maintenant si les deux évènements sont indépendants. Pour qu'ils le soient, il faut que :

$$P_i/P_{i-1}H = P_i/H \quad , \text{ auquel cas}$$

$$P_i P_{i-1}/H = P_i/H \times P_{i-1}/H$$

$$P_i/P_{i-1}H = C_{N-i+2}^1 F(x_i) (1 - F(x_i))^{N-i+1}$$

$$P_i/H = C_N^i F(x_i)^{i-1} (1 - F(x_i))^{N-i+1}$$

$$\frac{P_i/H}{P_i/P_{i-1}H} = \frac{C_N^i F(x_i)^{i-2}}{C_{N-i+1}^1} \cdot C_N^{i-2} \cdot F(x_i)^{i-2} \cdot \frac{N - (i-2)}{i(i-1)} \neq 1$$

Le calcul de la probabilité de non rupture devra donc se faire dans le cas le plus général du théorème des probabilités totales avec N évènements. Nous ne savons pas faire ce calcul.

II.II.3.2 - Exemples de problèmes en mécanique des sols

a) Résistance en pointe d'un pieu

Soit un pieu de section de 40 cm de diamètre foncé à travers un dépôt d'argile molle saturée d'une épaisseur de 25 m et descendu de 1 m à l'intérieur d'une couche de sable très compact ; l'argile molle a un poids spécifique immergé de 1 g/cm^3 et le sable de $1,2 \text{ g/cm}^3$. L'angle de frottement interne du sable est de 36° . Quelle est la résistance en pointe de ce pieu ?

- Pour calculer la force portante d'une fondation, on utilise la relation due à TERZAGHI :

$$q = cN_c + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma + \gamma D N_q$$

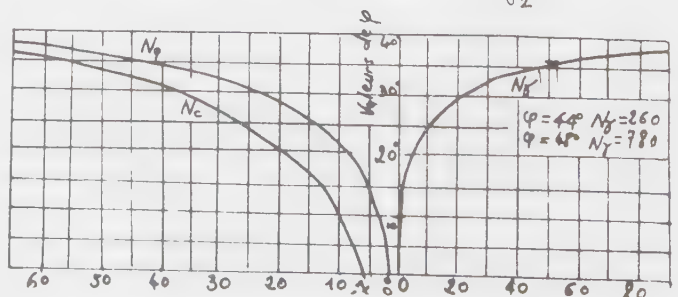
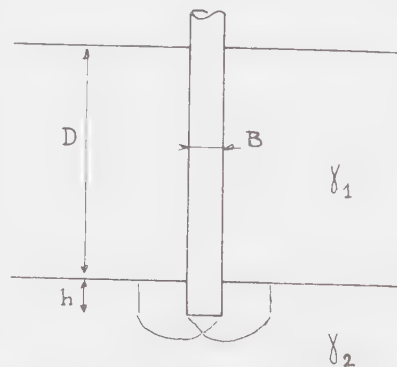
Sur l'abaque de TERZAGHI, pour $\phi = 36^\circ$

$$N_q \approx 47 \quad N_c \approx 62 \quad N_\gamma \approx 52$$

$$\begin{aligned} \text{Terme de surface : } & 0,5 \gamma B N_\gamma \\ &= 0,5 \times 1 \cdot 10^{-3} \times 40 \times 52 = 1,04 \text{ bar} \end{aligned}$$

$$\text{Terme de cohésion } cN_c = 0 \quad (c = 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Terme de profondeur } & \gamma D N_q \\ & (1 \cdot 10^{-3} \times 25 \cdot 10^2 + 1,2 \cdot 10^{-3} \times 10^2) 47 \\ &= 123,14. \end{aligned}$$



Pour un pieu, le terme de profondeur est largement prépondérant. On pourra charger ce pieu d'une masse $M = 123 \times \frac{\pi (40)^2}{4} 10^{-3} = 154,5$ Tonnes.

Soit en tenant compte du coefficient de sécurité 3, la charge admissible sous la pointe sera 51,5 Tonnes.

Dans ce problème, nous avons 3 sortes d'incertitudes :

- 1°) Erreurs sur les mesures des paramètres envisagés,
- 2°) Représentativité des valeurs trouvées pour les paramètres
- 3°) Confiance à accorder à la méthode.

La méthode précédente résout le problème en divisant le résultat obtenu par 3, ce diviseur est le coefficient de sécurité.

Ce qui serait intéressant ce serait de pouvoir affirmer que le pieu a tant de chances de tenir telle charge.

Pour simplifier le problème nous supposons qu'il n'y a pas d'erreurs de mesures et nous ne prenons en considération que le terme de profondeur.

$$q_0 = \gamma_0 D N_{q_0} \neq 122 \text{ bars avec } \gamma_0 = 1 \text{ et } D = 26$$

Influence de la dispersion des paramètres mis en cause

D : pas de dispersion sur la profondeur, on peut la mesurer exactement

γ : c'est le poids spécifique humide de la couche de 25 m ; ce qui nous intéresse pour γ c'est de connaître sa valeur moyenne

N_q : il caractérise le volume de sol entrant en plasticité, il ne dépend que de l'angle de frottement de cette zone.

La zone intéressée par la rupture peut être considérée comme petite par rapport au volume de la couche de sable.

Appelons cette zone volume unitaire. On se trouve dans le cas du maillon le plus faible c'est-à-dire de tirer dans une population de N volumes unitaires, 1 volume unitaire de caractéristiques données.

On voit donc tout de suite :

- 1°) qu'il faut faire appel à l'étude des paramètres suivant les volumes homogènes pour estimer N ;
- 2°) qu'il faut faire appel à l'étude des dispersions de caractères pour connaître la distribution de la population suivant le caractère envisagé ;
- 3°) qu'il faut faire appel à l'étude de corrélations pour connaître la probabilité de l'évènement AB/H, en effet : q sera inférieur à q₀ si γ est inférieur à γ_0 (évènement A) ou si N_q est inférieur à N_{q0} (évènement B).

$$(A + B) / H = A/H + B/H - AB/H.$$

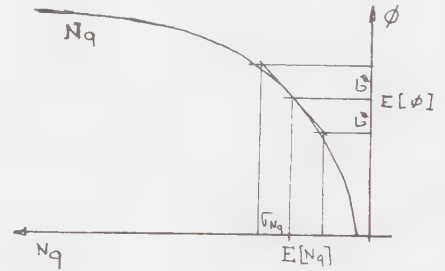
Nous connaissons la distribution du paramètre $\gamma : f(\gamma) \quad \sigma_\gamma \quad E[\gamma]$

Nous connaissons la distribution du paramètre $\phi : f(\phi) \quad \sigma_\phi \quad E[\phi]$

Nous connaissons le coefficient de corrélation des variables γ et $\phi : \rho$

Nous supposons que la variation de N_q autour d'une valeur correspondant à un ϕ donné est linéaire en fonction de ϕ .

Nous connaissons ainsi $E(N_q) \quad \sigma_{N_q}$ et ρ_{γ, N_q}



Dans ces conditions :

$$\text{Prob} \{ A/H \} = \int_{-\infty}^{\gamma_0} f(\gamma) d\gamma = \alpha$$

$$\text{Prob} \{ B/H \} = \int_{-\infty}^{N_q} f(N_q) dN_q = \alpha'$$

$$\text{Prob} \{ AB/H \} = \int_{-\infty}^{\gamma_0} \int_{-\infty}^{N_q} f(\gamma, N_q) d\gamma dN_q = \beta$$

Dans le cas de distribution normale, nous aurions :

$$\int_{-\infty}^{\gamma_0} \frac{1}{\sigma_\gamma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma - E[\gamma]}{\sigma_\gamma} \right)^2 \right\} d\gamma = \alpha$$

$$\int_{-\infty}^{N_q} \frac{1}{\sigma_{N_q} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{N_q - E[N_q]}{\sigma_{N_q}} \right)^2 \right\} dN_q = \alpha'$$

$$\int_{-\infty}^{\gamma_0} \frac{1}{\sigma_\gamma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma - E[\gamma]}{\sigma_\gamma} \right)^2 \right\} d\gamma \int_{-\infty}^{N_q} \frac{1}{\sigma_{N_q} \sqrt{1-\rho^2} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{N_q - E[N_q] - \rho \frac{\sigma_{N_q}}{\sigma_\gamma} (\gamma - E[\gamma])}{\sigma_{N_q} \sqrt{1-\rho^2}} \right)^2 \right\} dN_q = \beta$$

On voit que si γ et N_q sont indépendants ($\rho = 0$) : $\beta = \alpha\alpha'$

$$P = \alpha + \alpha' - \beta$$

La Probabilité de rupture sous la charge $q_0 = \gamma_0 DN_{q_0}$ sera donc :

$$P = C_N^1 P (1-P)^{N-1} = NP(1-P)^{N-1}$$

Confiance à accorder à la méthode

Il s'agirait ici de porter un jugement critique sur les différentes façons de déterminer (mesurer ou calculer) N_q .

Nous ne nous y risquerons pas ici. GRESILLON dans son "Etude des Fondations profondes en milieu pulvérulent" (Grenoble, Sept. 70) a comparé ses résultats expérimentaux aux résultats qu'aurait donnés la plupart des méthodes précédentes, en particulier : $N_q = \exp\{\pi \tan \phi\} \tan^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})$, N_q TERZAGHI, LE GALL, CAQUOT, KERISEL ($10^{3,04} \tan \phi$), MEYERHOF, et avancé une nouvelle proposition pour la résistance en pointe.

$q = N_q \cdot \gamma_1 \cdot D + N_q \frac{2f_1 \sin \phi}{L} h + N_q \cdot \gamma_2 \cdot h \left(1 + \frac{\sin \phi \cos \phi}{L} h\right)$ avec N_q de TERZAGHI
où $f_1 = \gamma_1 D \tan(\phi)$ et $L = B \cdot g(\phi)$
GRESILLON aurait trouvé :

$$q = 117,5 + 23 + 5,7 \neq 146 \text{ bar.}$$

Soit une charge admissible en pointe de 61 Tonnes (il utilise aussi le coefficient de sécurité 3).

Si on examine les principales valeurs de N_q proposées jusqu'à présent, voir graphique Figure II.3, on constate que nous aurons une dispersion des résultats de 1 à 12. Chaque auteur a d'excellentes raisons d'avancer ses propres valeurs, raisons qui sont liées à des hypothèses justifiées ou à des interprétations théoriques de résultats expérimentaux.

Aussi, dans l'état actuel des capacités que nous avons de critiquer ces résultats, nous proposons d'adopter l'attitude suivante:

L'ensemble des auteurs recouvrent l'ensemble des cas que l'on peut rencontrer. Il nous faudrait alors déterminer les cas les plus fréquents et la probabilité dans un problème déterminé de se trouver dans un tel cas, c'est-à-dire

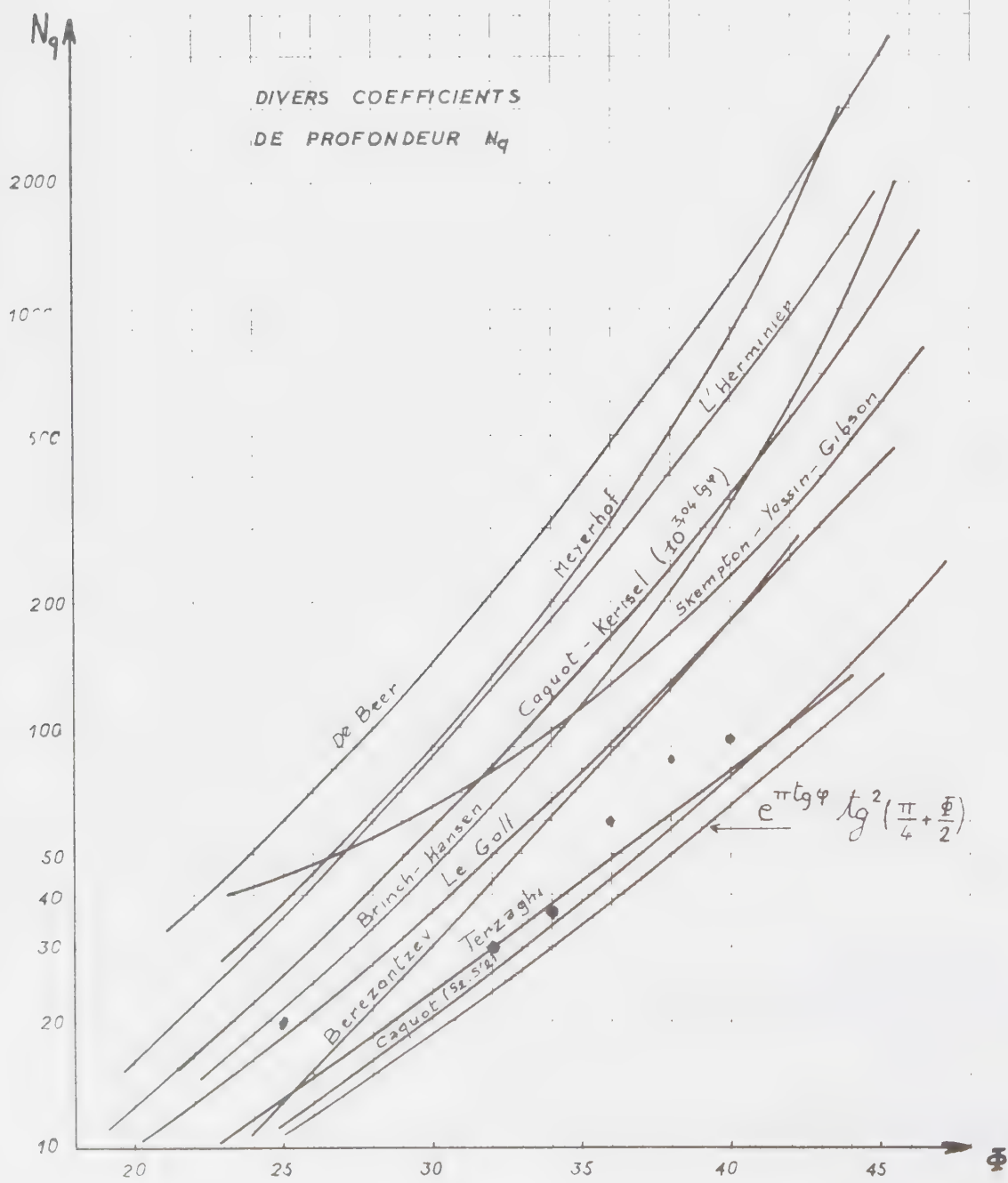


Fig. II-3

d'utiliser les propositions de tel auteur.

En conclusion, on voit que nous sommes très loin de pouvoir donner une probabilité de rupture sous une charge donnée dans un problème pourtant simple en apparence. Néanmoins, on voit la nature des difficultés et elles ne sont pas a priori insurmontables.

II.II.4 - Rationalisation de la reconnaissance

Outre l'utilisation des probabilités statistiques déjà largement faite, pour le contrôle du compactage par prélèvement (barrages, remblais, etc...), on peut chercher à connaître statistiquement un matériau en place.

La reconnaissance du sol se fait en général au droit des descentes de charge ou au droit de quelques points particuliers de l'ouvrage à réaliser (centre, coins, bords...).

Extraire un échantillon de taille suffisante (nombre de prélèvements "d'invidus-sol") pour avoir une idée précise du sol étudié (estimation probabilistique de ses paramètres) entraîne plus de prélèvements que ceux habituellement effectués.

Par contre, dans un site donné, il n'est que trop peu tenu compte des renseignements déjà obtenus par prélèvement antérieur.

La rationalisation de la reconnaissance doit partir en premier lieu d'une cartographie physique (nature des couches, agencement des couches) et géotechnique (propriétés des couches , ...) d'un site à partir de tous les sondages, prélèvements, observations réalisées.

L'étude portera sur les méthodes d'extrapolations des valeurs d'un point à un autre et sur la confiance à accorder à ces valeurs extrapolées.

Le but est de donner la probabilité de trouver, à partir des renseignements existants, la valeur de tel paramètre (toit des couches, épaisseur, propriétés mécaniques d'une couche, etc...) entre 2 valeurs les plus voisines possibles.

La reconnaissance alors aura pour but de tester ces intervalles de confiance, de les réduire; il faudra définir le nombre de prélèvements nécessaires à cela.

2ème PARTIE

L E S D O N N E E S

3ème Chapitre

FICHER LOIS RHEOLOGIQUES - PARAMETRES PHYSIQUES

III.I - CHOIX DES DONNEES

III.I.1 - Lois rhéologiques

Nous relevons les résultats des 2 grands types d'essais exécutés en laboratoire : - les essais de cisaillement (ou compression)
- les essais de tassement.

Pour les essais de tassement on utilise un mode opératoire : l'oedomètre, pour les essais de cisaillement, on peut utiliser différents modes opératoires qui impliquent des chemins particuliers dans l'espace des contraintes ou des déformations.

Nous répertorions 9 modes opératoires :

- le vane test de laboratoire
- l'essai de compression simple
- l'essai triaxial non drainé ou rapide
- l'essai triaxial drainé ou lent
- le cell test non drainé ou rapide
- le cell test drainé ou lent
- l'essai de cisaillement Casagrande non drainé ou rapide
- l'essai de cisaillement Casagrande drainé ou lent
- le Rhéogoniomètre.

Au cours de ces essais, le matériau a plusieurs comportements, répondant à plusieurs lois rhéologiques. Nous notons les caractéristiques de ces lois, chaque fois que l'essai en permet la mesure ou que celle-ci a été faite.

Le matériau, enfin, est polyphasique, et nous notons les caractéristiques correspondant à chaque phase, la phase solide et la phase liquide, ou du matériau polyphasique.

III.I.1.1. Essai oedométrique

Nous ne nous intéressons qu'aux essais sur matériaux préalablement saturés.

Le mode de relevé des résultats d'essais que nous verrons au prochain paragraphe, nous donne :

- le module oedométrique $\bar{E}$ et son inverse m_v coefficient de compressibilité,
- l'indice de consolidation C_c en tout point de la courbe de charge et décharge.

D'autre part, nous relevons pour une charge voisine de 4 bars, la perméabilité et le temps de consolidation primaire pour un degré de consolidation de 0,5 et 1.

Nous connaissons ainsi de 2 manières le coefficient de consolidation C_v du matériau pour une charge voisine de 4 bars.

III.I.1.2 - Essai de cisaillement

Pour le comportement élastique, nous relevons, quand c'est possible, le module de YOUNG E pour 3 pressions latérales différentes.

Pour le comportement plastique, nous relevons l'angle de frottement ϕ et la cohésion C , apparents et intergranulaires.

La connaissance des 2 types de caractéristiques permet celle de la pression interstitielle u_f en fin de chaque essai d'écrasement, rapportée à la contrepression initiale u_0 dans le matériau avant l'essai ; ceci dans le cas où l'enveloppe des cercles "des MOHR" est une droite.

N.B. - Les caractéristiques choisies sont celles de la plasticité parfaite autrement dit C^{PP} et ϕ^{PP} .

III.I.1.3 - Limitation dans le choix des données

Nous nous sommes, comme ^{on} le voit, limités dans le choix de caractéristiques de lois rhéologiques.

Pour l'oedomètre, nous ne pourrions faire une étude systématique avec le coefficient de consolidation C_v étant donné qu'il n'est relevé que pour une charge voisine de 4 bars. Nous pourrions néanmoins faire des études particulières de corrélations qui nous donneront une indication sur la possibilité d'études plus approfondies.

Pour les essais de compression, nous n'avons choisi qu'un critère, celui de la plasticité parfaite. Nous ne relevons pas les c et ϕ correspondant, par exemple, à l'enveloppe maximale de tous les cercles de MOHR, ni à la limite élastique ni à une limite de fatigue intervenant après n cycles de charge et décharge.

Enfin, nous ne distinguons pas dans les conditions hydrauliques intervenant pendant l'essai le cas du non drainage simple d'avec celui du non drainage après consolidation.

Pour le comportement élastique nous n'avons qu'un paramètre E , alors qu'il nous en faut 2 par exemple pour les calculs en élasticité infinitésimale isotrope: E, ν .

Il faut remarquer, néanmoins que dans le cas où des essais de compression et des essais oedométriques ont été réalisés sur le même matériau, on dispose de 2 paramètres E et $\bar{E}$.

$$\text{On sait que } \bar{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

On peut donc connaître ν .

Ce coefficient de Poisson est une valeur calculée à partir de résultats expérimentaux et non une valeur expérimentale elle-même. Il ne caractérise donc pas le matériau, mais une loi idéale de comportement du matériau : l'élasticité infinitésimale isotrope.

A côté de ces 2 limitations, nous ne prenons pas en considération les variations du volume, de pressions interstitielles en cours d'essais, ainsi que

celles de tout paramètre distinguant l'état initial de l'état final.

Pourquoi cette limitation ?

Pour 2 raisons qui sont en fait intimement liées :

1°/ S'il est vrai que nous ne voulons pas limiter notre application des méthodes statistiques, il n'est pas moins vrai que nous ne saurions engloutir d'un seul coup et sans une reconnaissance préalable tous les problèmes en mécanique des sols. Les lois rhéologiques auxquelles nous nous intéressons : élasticité infinitésimale dans l'hypothèse de l'isotropie, plasticité parfaite, théorie de la consolidation primaire pour le matériau biphasique (sol + eau), et les paramètres choisis pour caractériser ces lois sont suffisants pour engager des études sérieuses et dégager des directions de travail plus précises pour lesquelles nous aurions besoin de beaucoup d'information.

2°/ Le relevé de toutes les informations en plus des problèmes de stockage (standardisation des informations, volume démesuré des fichiers), pose celui du temps nécessaire au dépouillement des dossiers et repousse d'autant le démarrage du traitement et de la recherche.

Ce qui est valable pour les caractéristiques de lois rhéologiques, l'est pour tous les autres types de paramètres. Par la suite, nous ne reviendrons pas sur ces raisons de la limitation. Nous indiquerons simplement les principaux paramètres que nous aurions pu prendre encore en considération.

III.I.2 - Paramètres physiques

Nous relevons le poids volumique sec γ_d , la teneur en eau w et la densité des grains G .

La connaissance de ces trois paramètres avec celle du poids volumique de l'eau que l'on suppose en règle général égal à 1 g/cm^3 , nous donne celle des caractéristiques de géométrie (indice des vides e , porosité n), de masse (poids volumique du sol humide γ , des grains solides γ_s , du sol saturé γ_{sat} , du sol immergé γ' , ainsi que la teneur en eau du sol saturé w_{sat} et le degré de saturation S_r) comme l'indiquent les tableaux de l'Annexe I : Symboles et relations.

Nous relevons ensuite les caractéristiques granulométriques. Ce mode de

relevé nous permet de connaître toute la courbe granulométrique, donc en particulier le coefficient d'uniformité U , de courbure C_c , le % de Filler F et le facteur de Schön $\frac{\sum}{n}$.

Nous ne relevons pas de paramètres caractérisant la forme des grains, comme la sphéricité ou l'angulosité pour les sols pulvérulents. Mais on peut calculer une sphéricité théorique à partir de la courbe granulométrique.

Enfin, pour la consistance, nous prenons pour les sols cohérents les 3 limites d'Atterberg W_L , W_P , W_S qui nous donnent avec la connaissance de la teneur en eau, celle des indices de plasticité, de liquidité et de consistance.

Pour les sols pulvérulents, nous n'avons pris aucune des caractéristiques de compacité, e_{max} , e_{min} , I_D ; elles sont du reste très rarement fournies dans les dossiers.

Nous nous interdisons de ce fait un certain nombre d'études sur les sols pulvérulents ; néanmoins, les modes opératoires de mesures, de e_{max} et e_{min} sont si peu standardisés que les résultats qu'ils donnent ne sont pas intégrables dans un fichier normalisé, et qu'ils nécessitent des études particulières.

Nous relevons aussi les caractéristiques optimales du sol mesuré au Proctor Normal ou modifié γ_{OPN} , γ_{OPM} , W_{OPN} , W_{OPM} .

III.I.3 - Données qualitatives

Outre les caractéristiques de lois rhéologiques et les paramètres physiques, nous incluons dans ce fichier différentes indications qualitatives :

- 1°/ la nature du sol, sa couleur,
 - 2°/ le mode de prélèvement, la profondeur de prélèvement,
 - 3°/ la composition minéralogique quand c'est possible,
- enfin, chaque individu est personnalisé par un "état civil".

III.II - DEPOUILLEMENT - LE FICHIER

III.II.1 - Les contingences techniques

Les données sont stockées sous forme de Fichiers sur disque magnétique. La machine électronique que nous utilisons est l'IBM 1130 du Laboratoire de Mécanique.

Un disque magnétique comprend 200 cylindres de 8 secteurs chacun ; il faut prévoir un certain nombre de cylindres pour le Moniteur et pour les programmes, par exemple, une dizaine. En effet, l'IBM 1130 du Laboratoire n'est équipée que pour fonctionner avec un seul disque.

Chaque secteur comprend 320 mots mémoire.

Le mot mémoire, quantité élémentaire d'information, est un ensemble ordonné de 18 bits dont 16 contiennent réellement l'information ; le 1er de ces 16 bits contient le signe + ou -.

Un entier contenu dans 1 mot mémoire est donc compris entre -2^{15} et $+2^{15}$ soit -32768 et 32768. Un réel (c'est-à-dire un chiffre décimal) est stocké en 2 mots mémoire (ou trois, en précision étendue).

En vue d'obtenir un encombrement minimum, nous stockons toutes nos informations numériques sous forme d'entiers.

Capacité du disque.

Les Fichiers sont composés de Fiches. La Fiche est l'ensemble des informations sur un individu (échantillon de sol). La fiche est pour nous la quantité d'information minimale que nous pouvons retirer directement du fichier.

Un secteur devra donc comprendre un nombre entier de fiches. Pour cette raison, nous avons constitué des fiches de 40 mots, soit 8 fiches par secteur, sans perte de mots mémoire.

Un cylindre comprendra donc 64 fiches et le disque pourra inclure quelques 12000 fiches, soit 6000 pour le fichier "lois rhéologiques" et 6000 pour le fichier

"zones homogènes, conditions aux limites".

Les 2 fichiers doivent être en effet stockés sur le même disque car nous voulons les utiliser simultanément.

Nous voyons donc que la capacité d'un disque est importante. Nous pourrions, théoriquement étudier des populations de 6000 individus. Néanmoins, il faut remarquer que pour chacun d'eux nous n'avons pas toutes les informations et que lorsqu'on passe à des études de corrélations entre 2 ou 3 paramètres, le nombre des individus possédant ces 2 ou 3 paramètres décroît très vite.

Enfin, dans une population d'individus "sol", nous sommes obligés de distinguer des sous-populations correspondant à la nature du sol.

On s'aperçoit donc que le fichier de 6000 individus ne sera pas surabondant si nous voulons engager des études statistiques dans des directions multiples.

III.II.2 - Les Données

III.II.2.1 - Renseignements qualitatifs

a) Nature du sol

Nous avons adopté une dénomination simplifiée par rapport à celle utilisée par le BUREAU OF RECLAMATION.

Cette nouvelle classification essaye d'intégrer 3 choses :

- la nature mécanique du sol
- l'origine géologique
- les termes couramment utilisés par le sondeur.

En effet, le renseignement donné est celui du sondeur. Ce renseignement nous est utile pour le fichier zones homogènes où nous devons déterminer les "zones homogènes".

Dans ce cadre d'étude, une caractéristique géologique a un intérêt primordial. Le même renseignement est utilisé pour le fichier lois rhéologiques où la nature mécanique du sol est essentielle.

Nous avons distingué 12 catégories de sol et 4 informations particulières notées par une lettre code. Les 12 catégories de sol sont regroupées pour le fichier lois rhéologique en 4 sous-fichiers.

b) Couleur

Elle est notée par une lettre code.

Les 2 lettres : Nature du sol et couleur sont stockées dans 1 mot mémoire.

c) Mode de prélèvement

Il est noté par un chiffre code de 0 à 9.

d) Profondeur de prélèvement

Comme elle revêt un caractère indicatif, nous la notons en mètre seulement et à 2 chiffres. Nous nous limitons donc aux prélèvements effectués à moins de 99 m de la surface du sol naturel.

Le chiffre du sous-fichier, celui du mode de prélèvement et les 2 de la profondeur constituent un mot de 4 chiffres.

e) Composition minéralogique

Nous indiquons à l'aide de chiffres codes les différents composants connus du matériau. Nous avons répertorié 3 catégories de composants, codés de 1 à 9, qui sont :

- matière organique
- matière cimentante
- et 7 catégories d'argiles.

Nous disposons de 6 cases pour ficher les informations (2 mots), c'est-à-dire que nous pouvons répertorier 6 composants dans un matériau, notés par ordre d'importance, et 5 quand on n'a pas d'indication sur leurs proportions réciproques, la 1ère case est alors occupée par un 0.

III.II.2.2 - Paramètres physiques

a) Le poids volumique du sol sec γ_d est noté avec 3 chiffres. La précision est de 0,01 g/cm³. Nous supprimons la virgule. Il occupe un mot mémoire.

b) La teneur en eau W est notée avec 3 chiffres. La précision est de 1%, nous pouvons dépasser 100 %. Il occupe un mot mémoire.

c) La densité des grains solides est notée à 3 chiffres. La précision est de 1%. Nous supprimons la virgule. Il occupe 1 mot mémoire.

d) La granulométrie

La courbe granulométrique est notée par la valeur des D_{100} , D_{90} , D_{80} , ... D_{10} , D_5 et D_0 à 3 chiffres de la façon suivante :

76,5 mm = $7,65 \cdot 10^4$. On notera 476

115 = $1,15 \cdot 10^2$. On notera 211.

La précision est bonne, elle varie de 10% à 1%.

Ces 12 valeurs nous permettent, par un procédé que nous exposerons plus loin, de retracer toute la courbe granulométrique avec précision, donc d'avoir le maximum d'informations.

L'ensemble des 12 valeurs de 3 chiffres occupe 9 mots de 4 chiffres. On note, lorsque des points consécutifs D_i et D_{i+10} sont trop éloignés, un point intermédiaire $D_{\frac{i+i+10}{2}}$

e) Proctor

Nous notons le poids volumique du sol sec optimum à 3 chiffres avec une précision de $0,01 \text{ g/cm}^3$ et la teneur en eau à 2 chiffres avec une précision de 1%. Ces 5 chiffres constituent 1 mot, γ_{dop} étant inférieur à 3,27 ; enfin nous notons par 1 ou 2 la nature de l'essai (Normal ou Modifié).

f) Limites d'Atterberg

Elles sont notées avec une précision de 1%. 3 chiffres pour W_L qui avec le chiffre précédent constitue un mot. 2 chiffres pour W_p et 2 pour W_s . Ces 4 chiffres forment 1 mot.

III.II.2.3 - Caractéristiques de lois rhéologiques

a) Essai de compression

La nature de l'essai est notée par un chiffre code de 1 à 9. Ce chiffre est regroupé avec les 3 derniers caractérisant la minéralogie, pour constituer un mot de 4 chiffres.

Les angles de frottement sont notés en degrés, au degré près, avec 2 chiffres pour chaque caractéristique apparente et intergranulaire. Ils constituent 1 mot.

La cohésion apparente et intergranulaire sont notées en suivant un procédé analogue aux D_x en granulométrie.

entre 10 et 100 g/cm ²	la précision est de	1 g/cm ²
entre 100 g/cm ² et 1 kg/cm ²	la précision est de	10 g/cm ²
entre 1 kg/cm ² et 10 kg/cm ²	la précision est de	0,1 kg/cm ²

L'information comprend 3 chiffres qui occupent un mot.

Module de YOUNG

Nous notons le module de YOUNG sous 3 pressions latérales. Cette pression latérale est donnée à 0,1 bar près.

Le module d'YOUNG est noté comme la cohésion.

entre 1	et 10 bars	la précision est de	0,1 bar
entre 10	et 100 bars	la précision est de	1 bar
entre 100	et 1000 bars	la précision est de	10 bars
entre 1000	et 2600 bars	la précision est de	100 bars

On ne peut dépasser 2600 bars.

Ces informations sur les modules occupent 3 mots.

b) Essai de tassement

Comme pour la courbe granulométrique, nous notons la courbe oedométrique

par différents points et nous la reconstituons par la même méthode.

Nous notons les valeurs de la caractéristique de tassement pour 9 valeurs de la contrainte 0,1 - 0,5 - 1 - 2 - 4 - 8 à la charge
8 - 1 - 0,1 à la décharge
la caractéristique de tassement est donnée à 4 chiffres.

Un chiffre code précède le 1er groupe de 4 chiffres. Il indique si la caractéristique de tassement est l'indice de vide e , le tassement $\frac{\Delta h}{h}$ ou la teneur en eau de saturation W_{sat} .

L'information sur la courbe oedométrique occupe 9 mots.

Nous notons pour une charge voisine de 4 bars et inférieure à 4 bars, les temps de consolidation primaire à 50% et à 100% ; t_{100} et t_{50} occupent 1 mot ils sont notés suivant un processus analogue à c et c' .

Nous pourrions aller pour t_{100} jusqu'à 7 h 13 mn et pour t_{50} jusqu'à 2 h 45 min. La précision varie de 1 à 10 %.

Nous notons enfin la perméabilité sous la charge prise en considération par 2 chiffres ; 1 pour la mantisse , 1 pour la caractéristique. La précision varie de 5 % à 50% (mantisse). Ces 2 chiffres, avec les 2 indiquant la charge considérée en kg/cm^2 forment 1 mot.

III.II.2.4 - Etat Civil de l'individu

Il est absolument nécessaire de pouvoir revenir du Fichier au dossier où nous avons pris les résultats, soit pour vérifier si une information n'a pas été mal notée, soit pour estimer la validité d'une information qui semble erronée, soit pour compléter les informations en vue d'études particulières, par exemple.

D'autre part, cet Etat Civil de chaque individu doit permettre le passage du fichier "Lois rhéologiques" au fichier "zones homogènes".

Pour le retour aux dossiers, nous relevons l'origine du Dossier à savoir l'organisme, le laboratoire où ce dossier est accessible ainsi que l'année et le mois où il a été établi.

Pour la connexion entre les 2 fichiers nous complétons cet état civil par un repérage géographique pour le site de Grenoble et une numérotation en lettre pour les autres provenances.

En fait, cette question de l'état civil avec le retour au dossier et la connexion des 2 fichiers n'est réglée que provisoirement et principalement pour le site de Grenoble.

La méconnaissance du mode d'archivage dans d'autres organismes que le Laboratoire de mécanique des sols de Grenoble ainsi que celle de la possibilité d'accès à d'autres sources d'information font que nous avons adopté une solution provisoire mais modifiable à chaque instant.

Enfin , la connexion entre les 2 fichiers se pose surtout pour le site de Grenoble à l'heure actuelle.

4ème Chapitre

FICHER ZONES HOMOGENES

Nous avons entrepris de ficher tous les sondages et forages réalisés dans le site de Grenoble. Si cet important travail donne les résultats espérés, nous pourrons étendre l'étude à d'autres sites ou autres régions.

La mise au point du fichier sondage et les dépouillements des premières données a été réalisé principalement par M. BIGUENET qui a entrepris un travail de recherche sur les zones homogènes.

IV.I - CHOIX DES DONNEES

Il s'agissait pour nous de répertorier le maximum d'informations sur la configuration et les caractéristiques des couches alluvionnaires du sous-sol de Grenoble.

Ceci implique 2 types d'information :

- la géométrie des couches ou "zones homogènes"
- les caractéristiques de ces couches

Comme nous l'avons indiqué dans le Chapitre II de la 1ère Partie, au paragraphe "Différents types de données", les caractéristiques des couches sont données par les essais en place. Ces essais en effet, à l'encontre de ceux réalisés sur une carotte forcément de petite dimension, intéressent un volume important de sol. On impose certaines "conditions aux limites" à ce volume et on mesure les effets produits.

A ce titre là, on peut parler sans ambiguïté de tests des zones homogènes par des essais aux limites.

IV.I.1 - Géométrie des zones

Nous repérons dans l'espace les toits des couches rencontrées dans un sondage en notant les coordonnées Lambert du sondage et la cote NGF du sol naturel au lieu de sondage et la distance de chaque toit de couche à cette cote. Nous relevons la nature et la couleur du sol pour chaque couche.

Nous relevons enfin la profondeur de la nappe phréatique.

Cette dernière information en soit peut être sans signification. En effet, dans le site de Grenoble où la nappe est très près du sol son niveau varie au long d'une année et d'année en année, suivant les conditions climatiques et hydrauliques du moment. Aussi l'information sur le niveau de la nappe ne doit être utilisé qu'avec l'information sur la date de la mesure, information que l'on trouve dans l'état civil du sondage.

Nous voyons néanmoins que, comme pour certaines données du Fichier "Lois Rhéologiques", cette information pourra servir en elle-même à dégrossir une étude systématique de la nappe phréatique envisageable seulement avec des données particulières.

En outre, le niveau de la nappe phréatique est une des conditions aux limites pour les couches inférieures.

Toutes ces informations sur la géométrie des zones perdraient une partie de leur intérêt si chaque résultat n'était accompagné d'une estimation de la confiance à lui accorder.

Si, en effet, les essais en Laboratoire (Fichier "Lois Rhéologiques") sont standardisés et effectués de telle manière qu'ils comportent d'un manipulateur à l'autre un risque d'erreur analogue, il n'en est pas de même pour les logs de sondages.

Outre l'erreur systématique qui peut être due au procédé de sondage lui-même, procédé que nous notons dans l'état civil, nous affectons une note de crédibilité globale pour la profondeur et la nature des différentes couches.

Enfin, nous donnons une note de crédibilité :

- au repérage lambert lié au plan de sondage,
- à la cote NGF liée à la proximité de points cotés connus,
- au niveau de la nappe lié à la façon dont il a été mesuré.

IV.I.2 - Tests aux limites

Nous n'avons pas encore déterminé complètement la gamme des essais en place que nous relèverions.

Nous indiquons pour le moment ceux que nous répertorions :

- essais de battage,
- essais de cisaillement en place jusqu'à rupture
- essai de pression statique sans rupture
- perméabilité, autres essais.

Enfin, nous indiquons si dans telle ou telle couche il y a eu prélèvement d'échantillons.

Chaque sondage est personnalisé par un "Etat Civil".

IV.II - DEPOUILLEMENT - LE FICHIER

Nous retrouvons les mêmes contingences techniques que pour le Fichier "Lois rhéologiques".

Nous adoptons les mêmes solutions :

- informations sous forme d'entiers,
- regroupement d'informations dans un même mot mémoire.

Nous venons de signaler que nous n'avions pas encore mis au point les données de "tests aux limites". Nous ne stockons donc pour le moment que les données de géométrie des zones homogènes.

Le fichier comprend, état civil inclus, 26 mots. Nous disposons donc de 14 mots pour les résultats d'essais en place.

Les Données

Les coordonnées Lambert sont très rarement données. On dispose en général d'un plan de reconnaissance, parfois seulement d'un croquis.

Nous relevons néanmoins sur des cartes au 1/1000 la position du sondage au mètre près, c'est-à-dire 6 chiffres pour X et 6 pour Y et nous donnons une note de crédibilité de 1 à 5 indiquant la précision de 1 m à 100 m . X et Y occupent 2 mots mémoire.

La cote NGF est parfois donnée, sinon nous l'estimons à partir des points cotés voisins, en tenant compte si possible dans l'extrapolation des ruptures de pentes, remblais ou déblais de route, etc... Elle est notée à 1 dm près à 5 chiffres.

Nous affectons la cote d'une note de crédibilité de 1 à 5 indiquant la précision de 1 dm à 10 m (pour le site de Grenoble nous n'utiliserons que la précision inférieure à 1 m).

La profondeur de la nappe est notée à 10 cm près à 3 chiffres. La cote et la nappe constituent un mot mémoire .

La crédibilité sur la couche inclue la précision sur la profondeur et l'estimation de la nature par une note de 1 à 9.

Les 4 crédibilités : - coordonnées lambert

- cote NGF

- niveau de la nappe

- profondeur et nature des couches

constituent 1 mot mémoire.

La profondeur du toit des couches est noté comme la nappe à 10 cm près. Un 4ème chiffre code indique s'il y a eu dans cette couche un essai en place ou un prélèvement d'échantillon, ou les deux.

Pour des raisons de commodités, nous notons en 2 fois les sondages où on rencontre plus de 8 couches (ou 3 fois ceux où on en rencontre plus de 16). Nous ne pouvons répertorier des couches d'une profondeur supérieure à 99,9 m. La nature et la couleur des terrains de chaque couche sont notés par une lettre code chacune,

le même code que pour les individus sols.

Nous ajoutons 2 types de matériaux :

- la terre végétale de surface
- les remblais de composition particulière (débris de démolition, briques, déchets non ménagères).

L'état civil du sondage est celui défini au chapitre précédent.

5ème Chapitre

LIVRET DE DEPOUILLEMENT ET FEUILLES DE RESULTATS

Nous proposons un livret de dépouillement contenant les indications nécessaires et les codes.

Le livret est unique pour les 2 fichiers, ceux-ci possédant un certain nombre de renseignements communs, en particulier l'état civil et des données qualitatives.

Nous proposons des feuilles de résultats pour chaque fichier. Elles peuvent être remplies au fur et à mesure des essais réalisés, ou une fois le dossier constitué; elles restent dans les dossiers. Ce sont ces feuilles que nous consulterons ensuite pour le relevé des informations.

LIVRET DE DEPOUILLEMENT

Laboratoire de Mécanique des Sols
de Grenoble

Juillet 1971.

ETAT CIVIL

L'état civil d'un individu sol est celui du sondage où il a été prélevé - 2 individus prélevés dans le même sondage ont le même état civil - ils se différen- cient par la profondeur de prélèvement.

Nous incluons dans l'état civil le procédé de sondage.

Procédé de sondage

Code : A : Battage avec graphique P : Pénétromètre
 B : Battage Q : Rotation tricône
 C : Battage équipé d'un piézomètre R : Rotation carottier
 E : Electrique W : Rotation équipé d'un piézomètre
 F : Fouille - Puits V : Rotation et Battage
 G : Puits de pompage S : Sismique
 H : Hammergrab (Benoto) T : Tarière
 I : Hammergrab équipé d'un U : Tarière équipé d'un piézomètre.
 piézomètre

Provenance du dossier

Code : A : Solétanche P : Ponts et Chaussées
 L : Laboratoire de Grenoble C : Coyne et Belier
 S : Socotec Grenoble E : E.D.F.
 M : Mécasol Paris T : Terzaghi-Peck (Bibli.)
 B : Bureau Berg O : Inconnue

Date de la reconnaissance

Code des mois

Janvier	A	1° quinzaine	Avril	G	Juillet	M	Octobre	T
	B	2° quinzaine		H		N		U
Février	C		Mai	I	Août	P	Novembre	V
	D			J		Q		W
Mars	E		Juin	K	Septembre	R	Décembre	X
	F			L		S		Y

Quinzaine inconnue 0

Code des années

Antérieur à 1955 : Z	1961 : G	1968 : N	1975 : V
1955 : A	1962 : H	1969 : P	1976 : W
1956 : B	1963 : I	1970 : Q	1977 : X
1957 : C	1964 : J	1971 : R	1978 : Y
1958 : D	1965 : K	1972 : S	
1959 : E	1966 : L	1973 : T	Année inconnue : O
1960 : F	1967 : M	1974 : U	

Repérage géographiqueCode des zones actuelles

G : Grenoble	A : Algérie
N : France Nord (Lambert)	
C : France Centre (Lambert)	
S : France Sud (Lambert)	
P : Paris	

Site de Grenoble

- Code des sous-zones

- Le site de Grenoble est arbitrairement pour nous un carré de 10 x 10 km de coordonnées Lambert comprises entre 319,5 - 329,5 et 861,5 - 871,5. Cette zone est divisée en 25 sous-zones de 2 x 2 km² chacune portant la numérotation de A à Z (0 exclus) de gauche à droite et de haut en bas.

- A l'intérieur de chaque sous-zone chaque chantier est affecté au dépouillement d'une lettre et chaque sondage du chantier d'une lettre. Ces 2 lettres sont portées sur les cartes de sous-zones et les plans de détail ; quand un chantier comprend plus de 25 sondages, il est considéré comme un chantier double.

Autres Provenances

Jusqu'à plus ample avancement dans les dépouillements les 3 lettres de sous-zones, chantier, sondage sont remplies par une numérotation en lettres des échantillons prélevés.

Cette numérotation est notée sur des feuilles spéciales.

CREDIBILITESCrédibilité sur les coordonnées Lambert

0 : erreur supérieure à 100 m
 1 : erreur inférieure à 100 m
 2 : " $\leq$ 30 m
 3 : " $\leq$ 10 m
 4 : " $\leq$ 3 m
 5 : " $\leq$ 1

Crédibilité sur la cote NGF

0 : erreur supérieure à 1 m
 1 : " $\leq$ 1 m
 2 : " $\leq$ 30 cm
 3 : " $\leq$ 10 cm
 4 : " $\leq$ 3 cm

Crédibilité sur la nappe et sur la désignation des couches

Désignation des couches Nappe	Bonne	Approximative	Douteuse
Bonne	9	7	4
Approximative	8	5	2
Douteuse	6	3	1

Crédibilité sur la profondeur relative des couches

0 : erreur supérieure à 1 m
 1 : " $\leq$ 1 m
 2 : " $\leq$ 30 cm
 3 : " $\leq$ 10 cm
 4 : " $\leq$ 3 cm

Données qualitativesNature du sol

1 lettre



Désignation	Lettre code	Sous-fichier pour le fichier "Lois rhéologiques"
Graviers propres	G	1
Graviers sableux	H	
Graviers argileux	I	
Eboulis de pente	J	
Sable propre	S	2
Sable argileux	T	
Limons	M	3
Argile	C	
Argile avec gravier	D	
Argile ou limon organique	B	
Sol lité	L	
Tourbe	P	4
Sol inconnu	O	Néant
Eau	W	
Terre végétale de surface	A	
Remblai artificiel	R	

"Sable argileux" (T) inclut les sables argileux et les argiles sableuses. Pour les zones homogènes, nous saurons qu'une frontière entre une couche d'argile et une couche de sable est à chercher dans cette bande.

Pour le fichier "lois rhéologiques", grâce à la courbe granulométrique, nous pourrions reclasser une argile sableuse dans le sous-fichier 3.

"Argile avec gravier" (D) désigne un sol comme les moraines où les graviers ne forment pas une ossature mais sont noyés dans l'argile; ces sols ont le comportement des argiles ; par contre la présence ou non de graviers n'est pas indifférente du point de vue géologique.

Pour le fichier "Lois Rhéologiques", un "gravier argileux" pourra être reclassé dans le sous-fichier 3 grâce à la courbe granulométrique.

"Sol inconnu" (O) indique que nous n'avons aucune indication sur le sol rencontré.

"Eau" (W) est utilisé pour les sondages exécutés sous l'eau (lac, rivière, mer) la cote du sondage sera le niveau de la surface libre. La première "couche" rencontrée sera alors de ... l'eau.

Couleur

1 lettre

	A		I		Q
Bleu :	B	Jaune :	J	Rouge - Rougeâtre	R
	C	Orange	K	Veiné	S
	D		L		T
	E	Marron	M		U
	F	Noir	N	Vert	V
Gris :	G	Non connue	O	Blanc (white)	W
Gris foncé	H		P		X

Mode de prélèvement

1 chiffre

Carottier statique	1	Carottier double	4	Mesure en place	7
Carottier dynamique	2	Boîte cubique	5	Echantillon artificiel	8
Masier	3	Echantillon remanié	6	Bibliothèque	9

Profondeur de prélèvement

2 chiffres

En mètre

Composition minéralogique

2 fois 3 chiffres

1°/ Aucun renseignement sur la composition : 000 000

2°/ On dispose de renseignements :

Code des composants répertoriables

Matières organiques : 1	Attapulgate : 4	Kaolinite : 7
Matières cimentantes : 2	Montmorillonite : 5	Chlorite : 8
Halloysite : 3	Illite : 6	Vermiculite : 9

Si les informations sont purement qualitatives :

- Le 1er des 6 chiffres sera un zéro, les 5 autres cases sont remplies dans un ordre indifférent
- Si on connaît les proportions respectives des différents composants, les 6 cases sont remplies dans l'ordre décroissant des % de chaque composant.

Exemple : On a décelé la présence de matière organique et de matière cimentante. D'autre part, on sait que le matériau contient de la montmorillonite et de la chlorite.

On notera : 012580
ou toute autre combinaison 082150

On a pu classer en poids chacun des composants :

Montmorillonite 30%
Chlorite 10 %
Matière organique 2 %
Matière cimentante 1 %

On notera : 581200

PARAMETRES PHYSIQUES- Poids volumique sec γ_d en g/cm³- Teneur en eau

W en %

sans virgule, possibilité de dépasser 100%

- Densité des grains solides

G sans dimension

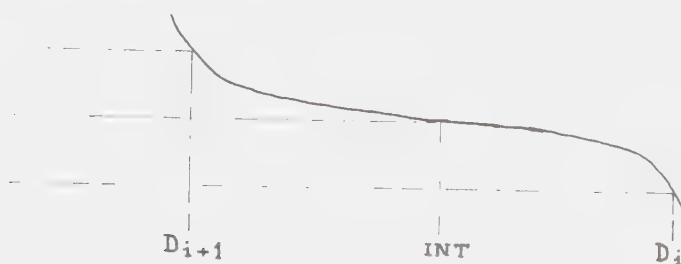
- Granulométrie

* Relevé de 12 diamètres 12 fois 3 chiffres

36 cases

 $D_{100} \quad D_{90} \dots\dots D_{10} \quad D_5 \quad \text{et} \quad D_0$ $D_i = 76,5 \text{ mm} = 76 \cdot 10^4 \mu \quad \text{noté} \quad 476$

* Eventuellement un diamètre intermédiaire lorsque 2 diamètres successifs sont trop éloignés.

* Si la courbe granulométrique ne descend pas jusqu'à 0%, on extrapolera graphiquement au delà de 1μ .Si D_0 est inférieur à $0,1\mu$ (valeur la plus petite que l'on peut noter) on le notera comme D_5 .

- Proctor

Code Essai au Proctor normal : 1

 Essai au Proctor modifié : 2

Mesure de γ_d opt et W_{opt}

--	--	--

- Limites d'Atterberg

W_L W_P W_S en %

--	--	--

Comme W (seul W_L peut dépasser 100 %)

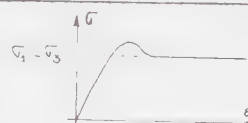
LOIS RHEOLOGIQUESCompression

Code de la nature de l'essai

☐

Vane test de laboratoire	1	Triaxial drainé ou lent	4	Boîte de Casagrande non drainé ou rapide	7
Compression simple	2	Cell test non drainé ou rapide	5	Boîte de Casagrande drainé ou lent	8
Triaxial non drainé ou rapide	3	Cell test drainé ou lent	6	Rhéogoniomètre	9

Le critère est celui de la plasticité parfaite


Angles de frottement apparent et intergranulaire
en degré
Cohésions apparente et intergranulaireLeurs valeurs sont notées avec une puissance de 10 de 10 g/cm²

la même pour les 2 :

$$C = 83 \text{ g/cm}^2 = 83 \cdot 10^0$$

$$C' = 54 \text{ g/cm}^2 = 54 \cdot 10^0$$

on note

$$C = 950 \text{ g/cm}^2 = 95 \cdot 10^1$$

$$C' = 670 \text{ g/cm}^2 = 67 \cdot 10^1$$

on note

Attention

Si C et C' encadrent une puissance de 10

$$C = 1,4 \text{ kg/cm}^2 = 14 \cdot 10^2$$

$$C' = 920 \text{ g/cm}^2 = 9 \cdot 10^2$$

on note Module de Young 3 fois 5 cases

On note le module et la pression latérale sous laquelle il est mesuré.

Pression latérale en bars avec 1 décimale

- pour le vane test, nous la considérons comme nulle

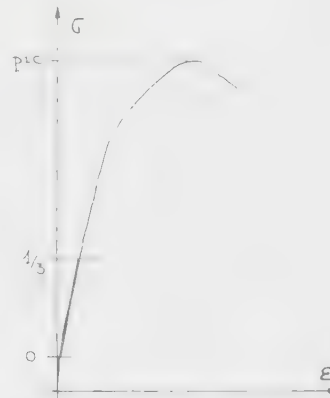
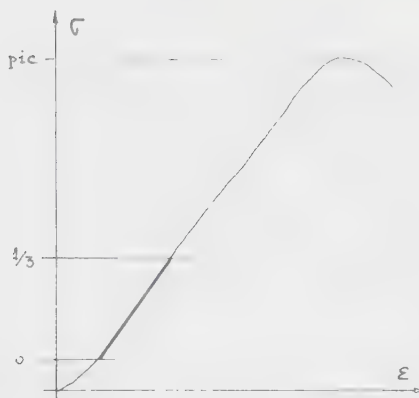
- pour la compression simple elle est nulle
- pour le triaxial et le cell test elle est donnée
- pour la Boîte de Casagrande, on donne la force verticale qu'il faut diviser par la surface de la boîte $6 \times 6 \text{ cm}^2$ (81 cm^2 pour le moule Proctor)

Module de Young

La courbe effort déformation n'est jamais rectiligne, même à son début

1°/ nous supprimons le départ de la courbe

2°/ nous prendrons E comme pente de la sécante dans le 1er tiers de la courbe entre 0 et le pic.



E est noté en bar avec une puissance de 10 de 1 bar

E = 7,5 bar	= $7,5 \cdot 10^0$	on note	075
E = 2480 bar	= $2,48 \cdot 10^3$	on note	325

On peut faire 3 relevés de E et G_3

Tassement

Code de la variable de tassement



Indice des vides	e	0
Déformation relative	$\Delta h/h$	1
Teneur en eau de saturation	W_{sat}	2

Tassement

9 fois 4 chiffres 36 cases

On relève avec 3 ou 4 chiffres significatifs la valeur du paramètre de tassement pour les contraintes = 0.1, 0.5, 1, 2, 4, 8 à la charge
et 8, 1, 0.1 à la décharge

Quand on pourra choisir le paramètre, on prendra de préférence e.

Pour e = a, bcd	on notera abcd
$\Delta h/h = ab, cd \%$	on notera abcd
$W_{sat} = abc, d \%$	on notera abcd

Temps de consolidation et perméabilité au voisinage de 4 kg/cm²

On relèvera la charge précédente la nouvelle charge telles que celles-ci encadrent 4 bars. On note la nouvelle charge. □

On note la perméabilité en cm/s avec 1 chiffre pour la mantisse et un chiffre pour la caractéristique. $K = 6,8 \cdot 10^{-4}$ sera noté 47. □

Temps de consolidation

On trace la courbe temps déformation dans les axes (log t, tassement) et on applique les conventions admises sur le tassement :

tassement secondaire : la courbe devrait être une droite : on en prend la tangente

tassement primaire : la courbe devrait être une droite : on en prend la tangente.

L'intersection des 2 tangentes donne t_{100} .

tassement initial : la courbe devrait être une parabole. Pour avoir le point initial d_s du tassement hydraulique, on applique la propriété particulière à cette courbe : si on prend des valeurs du temps dans le rapport 1 à 4, on a une différence d'ordonnée constante ; ainsi en prenant 4s et 16s et en reportant la différence d'ordonnées vers le haut, on définit d_s .

Ayant d_s et $d_{100\%}$, on obtient t_{50} au milieu et t_{50} .
On note t_{50} et t_{100} en secondes avec 2 chiffres significatifs.

Le nombre de zéro qui suivent les 2 chiffres significatifs de t_{100} sont notés, les 2 chiffres significatifs de t_{50} sont suivis alors du même nombre de zéro moins 1.

--	--	--	--

Exemple : $t_{100} = 2200 \text{ s}$
 $t_{50} = 180 \text{ s}$

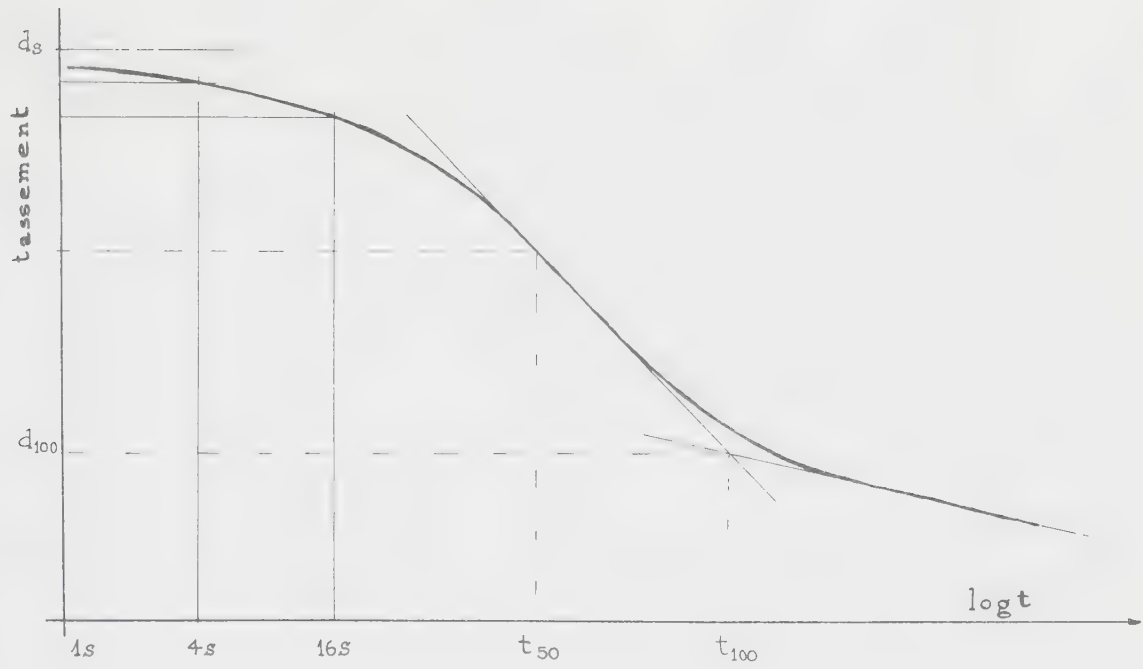
On note

2	2	2	1	8
---	---	---	---	---

3	1	1	0	9
---	---	---	---	---

 signifie

$t_{100} = 11000 \text{ s}$
 $t_{50} = 900 \text{ s}$



REPERAGE DES ESSAIS EN PLACE ET PRISE D'ECHANTILLONSCode

- 1 : Essai de battage (SPT ou assimilé) avec prise d'échantillons
- 2 : Même essai sans prise d'échantillons
- 3 : Essai de cisaillement en place jusqu'à rupture - Poinçonnement statique ou Vane test avec prise d'échantillons
- 4 : Même essai sans prise d'échantillons
- 5 : Essai de pression statique sans rupture (Essai de plaque - pressiomètre..) avec prise d'échantillons
- 6 : Même essai sans prise d'échantillons
- 7 : Essai de perméabilité - Autres essais
- 8 : Même essai sans prise d'échantillons
- 9 : Pas d'essai, prise d'échantillons
- 0 : Néant

Remarque : tout chiffre impair indique qu'il y a prélèvement.

FEUILLES DE RESULTATS POUR LE
FICHER "LOIS RHEOLOGIQUES"

ETAT CIVIL

Lieu : Chantier :
 Date : Sondage : Procédé de sondage :

Entrepreneur : Maître d'oeuvre :

Organisme qui a fait les essais : Lieu du Dossier :

Identification du Dossier dans l'organisme qui le détient :

Procédé de sondage : Lettre code
 Origine du dossier : Lettre code
 Date de la reconnaissance : Lettres code
 Zone : Lettre code

--	--	--

Numéro du sondage pour une provenance extérieure au site de Grenoble :

Code de sous-zone :
 Code de chantier :
 Code de sondage :

--

RENSEIGNEMENTS QUALITATIFSNature du sol

Désignation :

Symbole:

Lettre code ☐N° de sous-fichier ☐

1

3

Couleur

Désignation :

Lettre code ☐

2

Mode de prélèvement

Désignation :

Chiffre code ☐

4

Profondeur de prélèvement

haut - bas carotte ..,.. - ..,.. m
milieu (ab,..m) ..,.. m

ab

 5.6

1 2 3 4 5 6

----------------------	----------------------

lettres chiffres

Composition minéralogique

Composants	% s'il y a lieu	Chiffre code
-	-	-
-	-	-
-	-	-
-	-	-
-	-	-
-	-	-

----------------------	----------------------

PARAMETRES PHYSIQUESPoids volumique du sol sec γ_d Valeur (a,bc g/cm³) : ..,.. g/cm³

abc

LOIS RHEOLOGIQUESCisaillementNature de l'essai

Désignation :

Chiffre code

Angle de frottementApparent ϕ (ab°) : ..° abIntergranulaire ϕ' (ab°) : ..° abCohésionApparente C : ... g/cm² (ab 10^e g/cm²) .. 10' g/cm²Intergranulaire C' : ... g/cm² (cd 10^e g/cm²) .. 10' g/cm²

e ab ed

Module de Young

Pression latérale (a,b bars) ... bars ab

Module de Young : bars - (a,b 10^c bars) ... 10' bars cab

Pression latérale : ... bars

Module de Young : bars ... 10' bars

Pression latérale : ... bars

Module de Young : bars ... 10' bars

Compression - TassementParamètre de tassement

Désignation

Chiffre code

	Contrainte	<u>valeur du paramètre</u>	les 4 chiffres significatifs
chargement	0,1 bar	:	
	0,5 bar	:	
	1 bar	:	
	2 bar	:	
	4 bar	:	
décharge	8 bar	:	
	8 bar	:	
	1 bar	:	
	0,1 bar	:	

Charges encadrant 4 bars

Contrainte précédemment appliquée ...

Contrainte appliquée (a,b bar) ,.. bar

ab

Perméabilité sous cette charge

Valeur : (a 10^{-b} cm/s) . 10^{-c} cm/s

ab

Temps de consolidation sous cette charge

t_{100} ... s

t_{50} ... s

Nombre de zéro derrière les 2 chiffres significatifs de t_{100}

2 chiffres significatifs de t_{100}

2 chiffres significatifs de t_{50} si t_{100} et t_{50} diffèrent d'une puissance de 10 (ou 1 chiffre s'ils diffèrent de 2 puissances de 10).

FEUILLES DE RESULTATS POUR LE
FICHER "ZONES HOMOGENES"

ETAT CIVIL

Lieu :

Chantier :

Date :

Sondage :

Procédé de sondage :

Entrepreneur :

Maître d'oeuvre :

Organisme qui a fait
les essais :

Lieu du Dossier :

Identification du dossier dans l'organisme qui le détient :

Procédé de sondage :

Lettre code

Origine du dossier :

Lettre code

Date de la reconnaissance :

Lettres code

Zone :

Lettre code

--	--	--	--	--

Numéro du sondage pour une provenance extérieure au site de Grenoble :

Code de sous-zone :

--

Code de chantier :

--

Code de sondage :

--

--

POSITION GEOGRAPHIQUECoordonnées Lambert

X (abc, def km): ...,... km

abcdef 2

Y (abc, def km) : ...,... km

abcdef 3

Précision sur X et Y : ... m Note de crédibilité

 4

4	2	3

Cote NGF

Z (abcd, e m) :,... m

abcde 2

Précision sur Z :,... m Note de crédibilité

 4

1	2

Niveau de la nappe phréatique

Profondeur relative (ab, c m) :,...

abc 2

Appréciation sur la détermination de la nappe :

Couches

Appréciation sur la désignation des couches

Note de crédibilité pour le niveau de la nappe et la désignation des couches

 4

Précision sur la profondeur des couches,... m

Note de crédibilité

 3

1	2	3

LOG DE SONDAGE

[illegible]

Feuille de données FORTRAN

NO M^{EAUVRE} BICUENET

page sur

Tel 87-96-11 421
8-3

Laboratoire de MECANIQUE DES SOLS Fichier SONDAGES

	A	X	Y	A	Z	A	N	A	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇	D ₈	S	O	M	A	Rep		
1	1			2		3	20	4									51								73						
2																															
3																															
Mots memoire																															
4	1	2	3	4	1	5	6	1	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26			
5																															
6																															
7																															
8																															
9																															
10																															
11																															
12																															
13																															
14																															
15																															
16																															
17																															
18																															
19																															
20																															
21																															
22																															
23																															
24																															
25																															
							20	24									51									73					

3ème PARTIE

UTILISATION DES FICHIERS

6è Chapitre

ETUDE D'UN PARAMETRE PARTICULIER

LA GRANULOMETRIE

Les informations sur la granulométrie ne sauraient se réduire à quelques résultats particuliers. Beaucoup d'études ont été faites pour caractériser la granulométrie par quelques données simples. On utilise couramment le coefficient d'uniformité, de courbure, le % de Filler, et parfois le facteur de SCHON. En fait il nous faut 4 paramètres ce qui est beaucoup et il y a néanmoins perte d'information.

Ce qui intéresse le chercheur c'est toute la courbe granulométrique; ce qui intéresse l'ingénieur, ce sont 1 ou 2 paramètres définis à partir de toute la courbe.

Le but d'une étude sur la granulométrie est donc de porter un jugement critique sur les paramètres existants et si possible de fournir à l'ingénieur ce ou ces 2 paramètres nouveaux.

Les méthodes de calculs numériques et l'utilisation de la machine électronique permettent de stocker toute l'information sur la courbe granulométrique.

VI.I - TECHNIQUE MATHÉMATIQUE - LES FONCTIONS SPLINES -

VI.I.1 - Choix des fonctions splines

Le mot spline désigne en anglais la latte flexible qu'utilisent les dessinateurs pour tracer une courbe "lisse" f passant par des points (x_i, y_i) ($i = 1 \dots n$) donnés; la latte est astreinte à passer par les points x_i au moyen d'un godet pivotant fixé en chacun de ces points. Ces godets sont munis d'une rainure dans laquelle passe la latte. Dans la position d'équilibre qu'elle prend, la latte minimise l'énergie de flexion :

$$\int_x^{x_n} (f'')^2 / (1 + f'^2)^3$$

Quand nous traçons une courbe à partir de points, nous la "lisons", nous appliquons spontanément la règle de la latte flexible.

Une fonction spline sera donc une expression correcte d'une courbe dont nous nous serons donnés suffisamment de points.

Remarque : Ce ne sont pas les valeurs à partir desquelles nous avons tracé la courbe granulométrique que nous utilisons, mais des points sur la courbe une fois tracée. En effet, le chercheur travaille sur cette courbe qui ne passe pas forcément par les points expérimentaux.

Il existe des procédés pour obtenir à partir d'une courbe passant par les points expérimentaux une courbe "plus lisse" passant au voisinage de ces derniers, mais nous n'avons pas encore adapté ces procédés à nos besoins.

VI.I.2 - Fonction spline

VI.I.2.1 - Expression de la fonction

Soit n abscisses $x_1, x_2, \dots, x_n$ et n ordonnées $y_1, \dots, y_n$.

Soit $S_{2k-1}(x_1, \dots, x_n)$ l'ensemble des fonctions splines de degré $2k-1$

Il existe une fonction spline et une seule de S_{2k-1} avec $n \geq k$ $k \geq 2$ notée $s(x)$ telle que a) $s(x_i) = y_i$ $i = 1, \dots, n$.

b) $s(x)$ soit un polynôme de degré $k-1$ pour $x \leq x_1$ et $x \geq x_n$

$s(x)$ s'écrit alors :

$$s(x) = P_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (x - x_i)_+^{2k-1}$$

avec la convention :

$$(E)_+^m = E^m \quad \text{si } E > 0$$

$$= 0 \quad \text{si } E \leq 0$$

La condition a) permet de déterminer $\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$ en supposant connu P_{k-1}

La condition b) est satisfaite pour $x \leq x_1$

La condition $s^{(1)}(x) \equiv 0$ pour $x \geq x_n$ et $l = k, \dots, 2k-1$ et la condition

$s(x_1) = y_1$ permettent de déterminer P_{k-1} et λ_n de manière unique.

VI.I.2.2 - Propriété

La fonction spline s représente la fonction la plus lisse au sens de :

$$\int_{x_1}^{x_n} (s^{(k)}(x))^2 dx \text{ minimum.}$$

VI.I.1 - Fonction spline d'ordre deux : Méthode d'intégration

$$s(x) = ax + b + \sum_{i=0}^n \lambda_i (x - x_i)_+^3 \quad x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

c'est cette fonction d'ordre deux que nous utilisons, elle minimise

$$\int_{x_0}^{x_n} (s'')^2 dx$$

Calcul de la fonction spline.

s est formée dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ de polynômes $P_i(x)$ de degré 3 avec les 2 conditions de continuité.

$$P_i(x_i) = P_{i+1}(x_i) = y_i \quad (i = 1, \dots, n-1); \quad P_1(x_0) = y_0 \quad P_n(x_n) = y_n$$

Posons $M_j = s''(x_j)$ $j = 0, \dots, n$ et $l_j = x_j - x_{j-1}$ $j = 1, \dots, n$.

$s(x)$ s'écrit alors pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, \dots, n$.

$$s(x) = \frac{M_i - 1}{6 l_i} (x_i - x)^3 + \frac{M_i}{6 l_i} (x - x_i - l)^3 + \left(\frac{y_i}{l_i} - \frac{M_i l_i}{6} \right) (x - x_i - l) + \frac{y_i - 1}{6 l_i} - \frac{M_i - 1}{6} \frac{l_i}{l_i} (x_i - x)$$

$$1^\circ) - M_0 = M_n = 0$$

2°) - Les M_i pour $i = 1 \dots n - 1$ sont déterminés en écrivant la continuité des tangentes aux points x_i $s'(x_i -) = s'(x_i +)$

On obtient le système de $n - 1$ équations à $n - 1$ inconnues suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{l_1 + l_2}{3} & \frac{l_2}{6} & & & \\ \frac{l_2}{6} & \frac{l_2 + l_3}{3} & \frac{l_3}{6} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{l_{n-2}}{6} & \frac{l_{n-2} + l_{n-1}}{3} & \frac{l_{n-1}}{6} \\ & & & \frac{l_{n-1}}{6} & \frac{l_{n-1} + l_n}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{l_2} - \frac{y_1 - y_0}{l_1} \\ \frac{y_3 - y_2}{l_3} - \frac{y_2 - y_1}{l_2} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{l_{n-1}} - \frac{y_{n-3} - y_{n-2}}{l_{n-2}} \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{l_{n-1}} \end{bmatrix}$$

qui se résout très facilement par la méthode d'élimination de Gauss.

On trouvera en annexe dans les programmes la procédure Fortran de calcul de la fonction.

VI.I.4 - Application au tracé des courbes granulométriques

Dans nos fichiers, nous avons stocké 12 points de la courbe granulométrique.

Nous prenons pour le tracé :

$$y_0 = 100 \quad y_1 = 90 \quad \dots \quad y_{10} = 5 \quad y_{11} = 0$$

$$x_0 = 5 - \log D_{100} \quad \dots \quad x_{10} = 5 - \log D_s \quad x_{11} = 5 - \log D_0$$

Avec deux multiplicateurs convenables, nous obtenons la même échelle sur les feuilles de laboratoires et le traceur de l'IBM 1130.

Nous pouvons par superposition comparer la courbe expérimentale et la courbe recalculée.

Les résultats sont bons : planches des courbes figures VI.1 et 1 bis on notera que les différences viennent essentiellement d'une distortion des échelles des courbes expérimentales.

Signalons 3 améliorations :

- Pour les individus 1, 2, 6 nous avons pris 13 points pour le tracé et non 12; le 13ème est un point intermédiaire entre de x_i et x_{i+1} lorsque $(x_{i+1} - x_i)$ est trop grand, c'est l'abscisse du point d'ordonnée $\frac{y_i + y_{i+1}}{2}$. Le programme de tracé l'intercale automatiquement parmi les 12 valeurs.
- Pour l'individu 3 nous n'avons pas pris son D_{100} exact; nous aurions pu utiliser la méthode du point intermédiaire, mais nous avons préféré, décaler le D_{100} sans pour autant modifier réellement la courbe granulométrique.
- Méthode d'extrapolation

Les courbes expérimentales ne vont pas au-delà de 1μ ; notre procédé de relevé des D_x ne permet pas de noter en-dessous de 0.1μ .

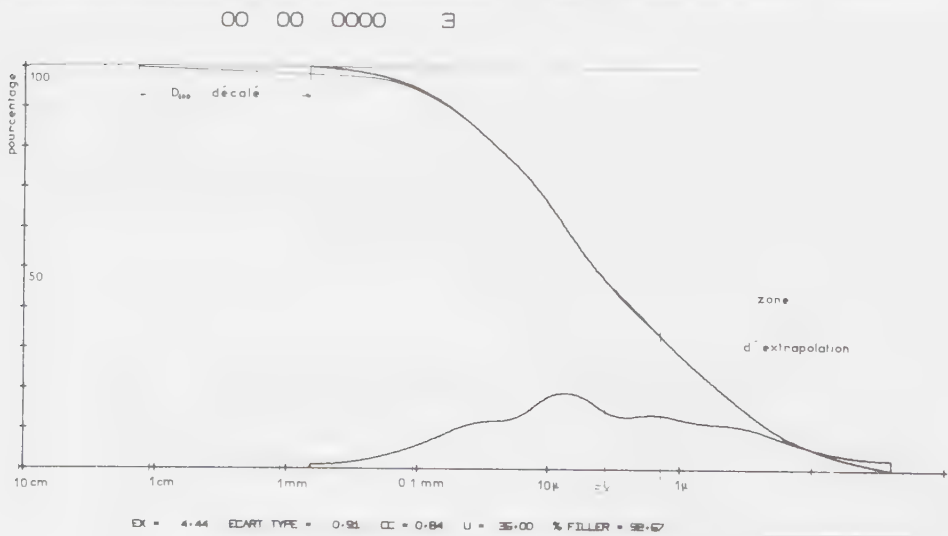
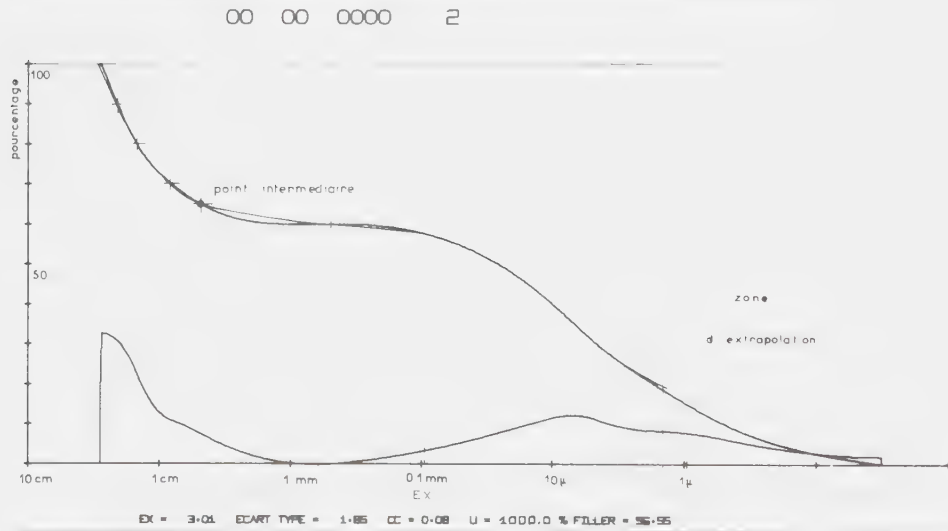
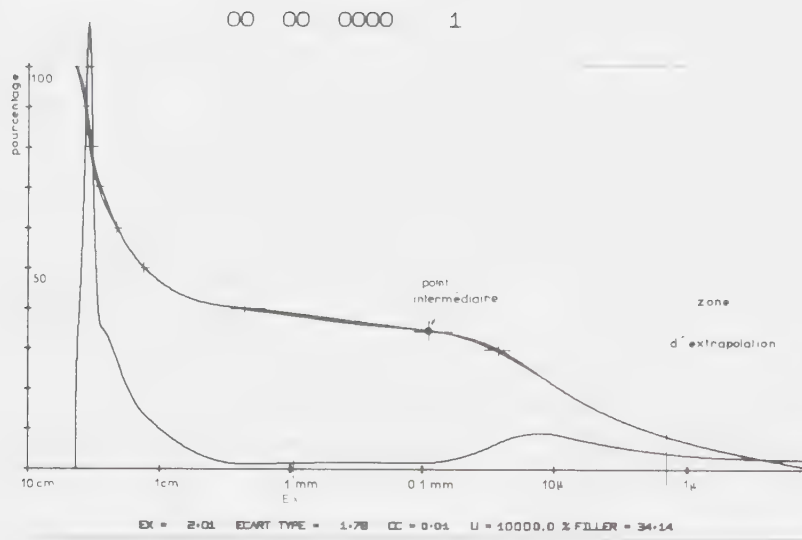
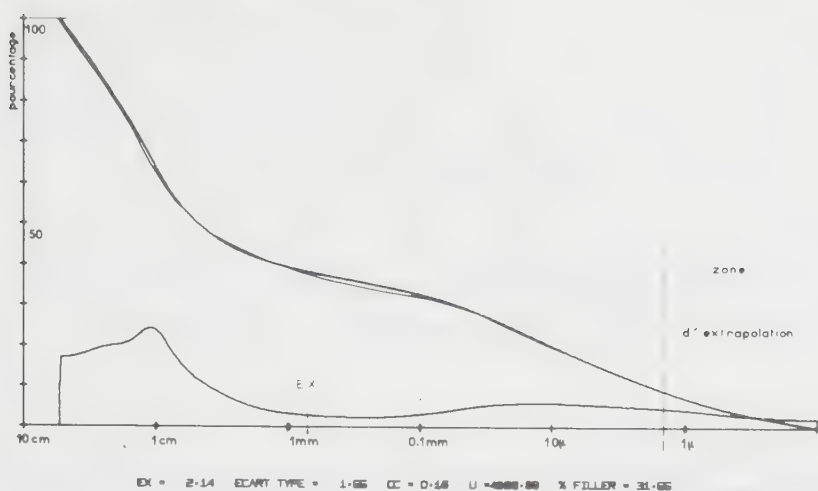
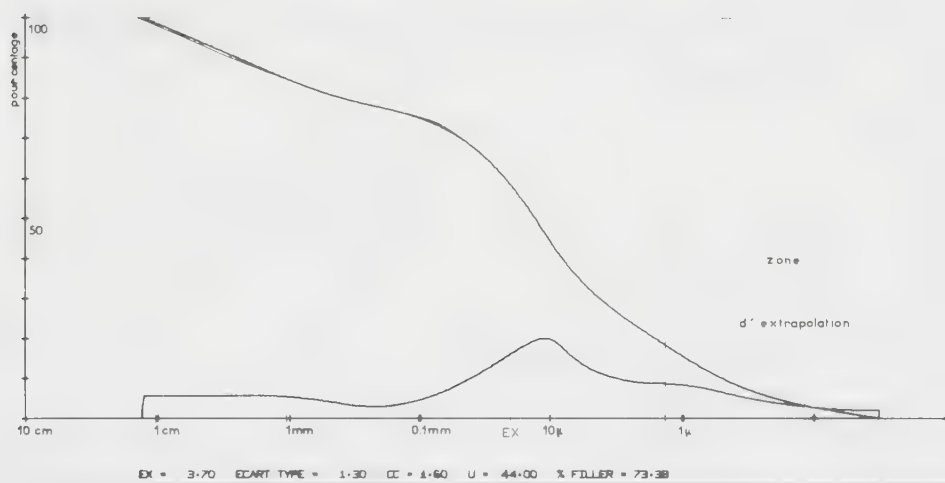


Fig VI 1

00 00 0000 4



00 00 0000 5



00 00 0000 6

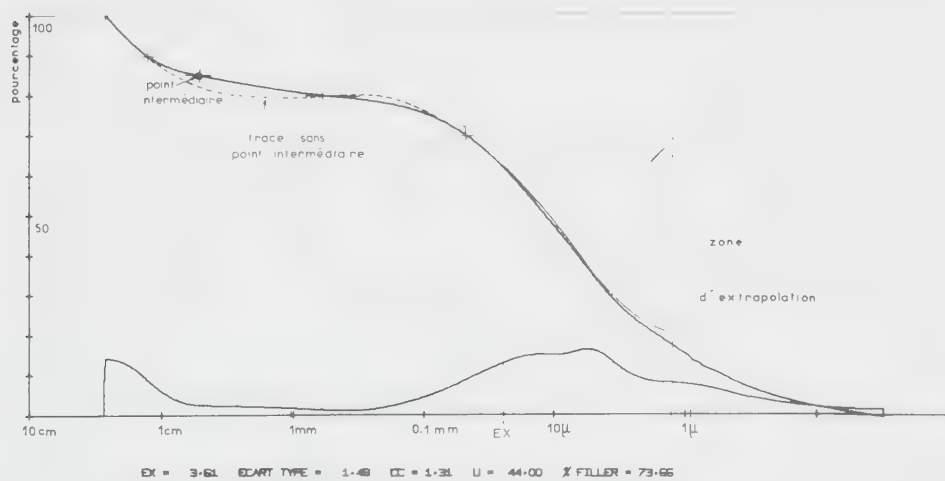
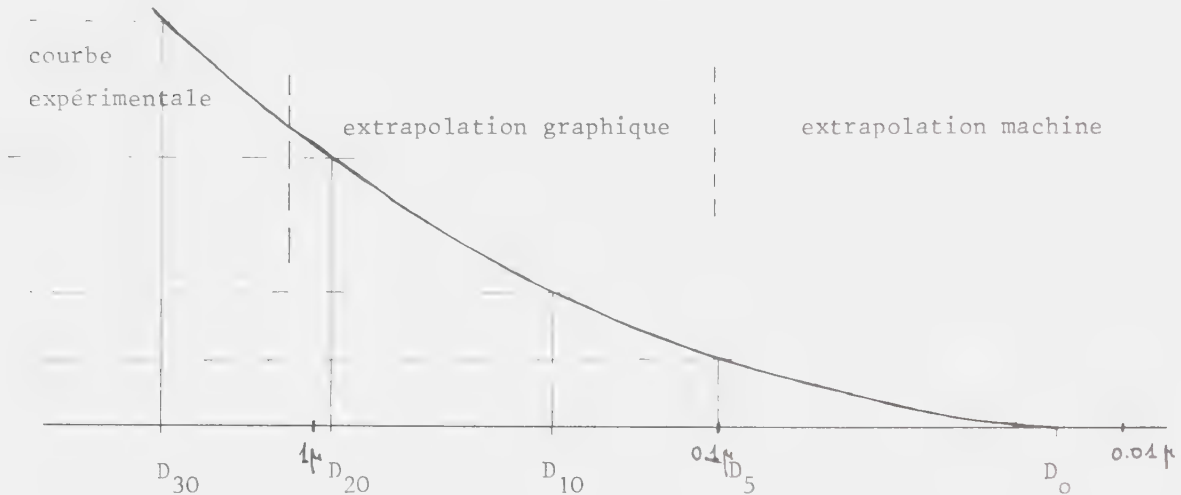


Fig. VI 1 bis

Pour toutes les courbes dont le D_0 est inférieur à 1μ nous avons fait une extrapolation graphique et relevé les D correspondants ; lorsque D_0 n'est pas atteint avant 0.1μ la machine fait elle même l'extrapolation : D_0 est affecté dans les données de la même valeur que D_5 .

La valeur affectée alors par la machine est telle qu'en échelle logarithmique $X_{D_0} = X_{D_5} + 2 (X_{D_5} - X_{D_{10}})$



Cette extrapolation n'a qu'un rôle pratique :

Pour pouvoir déduire de la courbe granulométrique, considérée comme courbe de répartition, la courbe de distribution des poids des grains suivant le diamètre, la courbe de répartition doit varier entre 1 et 0 inclus. Ce qui nous oblige de caractériser D_0 et D_{100} , car la fonction de lissage est polynomiale et ne peut avoir d'asymptote $y = 1$ ou $y = 0$.

Voir paragraphe suivant VI.II traitement statistique.

VI.II - TRAITEMENT STATISTIQUE

La courbe granulométrique n'est autre qu'une courbe de répartition. En effet, on peut considérer l'ensemble des grains comme une population. Le caractère suivant lequel cette population est étudiée est le poids des grains de diamètre compris entre D_x et $D_x + dx$.

Nous pouvons étudier, non plus la répartition, mais la distribution de la population suivant le caractère.

$$F(x) \equiv s(x)$$

$$F(-\infty) = s(-\infty) = s(\log D_0) = 0$$

$$F(+\infty) = s(+\infty) = s(\log D_{100}) = 1$$

VI.II.1 - Courbe de distribution

VI.II.1.1 - Expression

$$dF = f(x) dx$$

$$f(x) = s'(x) = -\frac{M_i - 1}{2 li} (x_i - x)^2 + \frac{M_i}{2 li} (x - x_i - 1)^2 + \frac{y_i - y_{i-1} - 1}{li} - \frac{li}{6} (M_i - M_{i-1} - 1)$$

$$M_0 = M_n = 0$$

$$x \in (x_{i-1}, x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

pour $x = x_0$ $s'(x) = f(x) = 0$

$x = x_n$ $s'(x) = f(x) = 0$

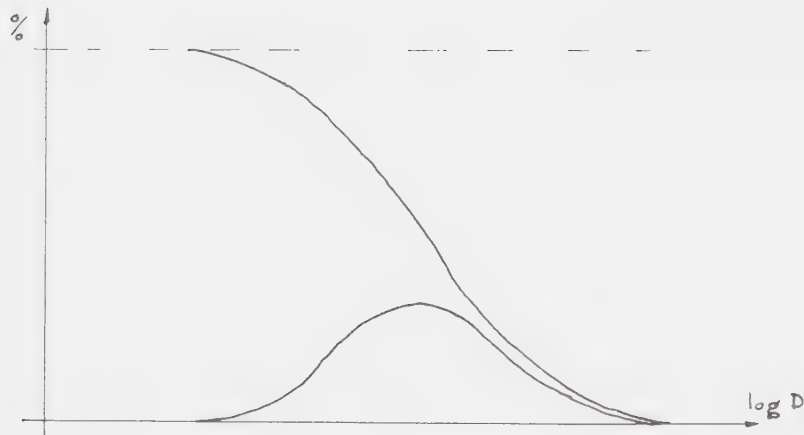
tangentes de la courbe de distribution

$$f'(x) = +\frac{M_i - 1}{li} (x_i - x) + \frac{M_i}{li} (x - x_i - 1)$$

pour $x = x_0$ $f'(x) = 0$

$x = x_n$ $f'(x) = 0$

L'allure de la courbe de distribution sera :



Voir planche des courbes figure VI-1.

VI.II.1.2 - Caractéristiques de la distribution

a) Moyenne

$$\begin{aligned}
 E x &= \int_{x_0}^{x_{11}} x f(x) dx = \int x dF \\
 &= \int_{x_0}^{x_{11}} -\frac{M_i-1}{21i} (x_i-x)^2 dx + \int \frac{M_i}{21i} (x-x_{i-1})^2 dx + \int \left(\frac{y_i-y_{i-1}}{1i} - \frac{1i}{6} (M_i-M_{i-1}) \right) x dx \\
 &= \sum_{i=1}^n -\frac{M_i-1}{21i} \left[\frac{1}{4} (x_i-x)^4 - \frac{x_i}{3} (x_i-x)^3 \right] + \frac{M_i}{21i} \left[\frac{1}{4} (x-x_{i-1})^4 + \frac{x_{i-1}}{3} (x-x_{i-1})^3 \right] + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_{i-1}}^{x_i}
 \end{aligned}$$

$$x \in (x_{i-1}, x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned}
 &= +\frac{M_i-1}{21i} \left[\frac{1}{4} (x_i-x_{i-1})^4 - \frac{x_i}{3} (x_i-x_{i-1})^3 \right] + \frac{M_i}{21i} \left[\frac{1}{4} (x_i-x_{i-1})^4 + \frac{x_{i-1}}{3} (x_i-x_{i-1})^3 \right] \\
 &+ \left[\frac{y_i-y_{i-1}}{1i} - \frac{1i}{6} (M_i-M_{i-1}) \right] \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2}
 \end{aligned}$$

Soit, tous calculs faits :

$$E[x] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{11} \frac{1i^3}{12} (M_i + M_{i-1}) + (y_i - y_{i-1})(x_i + x_{i-1})$$

b) Ecart type

$$\sigma^2(x) = \int_{x_0}^{x_{11}} [x - E[x]]^2 f x dx$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{11} \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^2 f_x dx - 2E[x] \sum_{i=1}^{11} \int_{x_{i-1}}^{x_i} x f_x dx + E^2[x] \sum_{i=1}^{11} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_x dx$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{11} \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^2 f_x \cdot dx - E^2[x]$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^2 f_x \cdot dx &= \frac{M_{i-1}}{21i} \left[\frac{(x_i - x)^5}{5} - 2x_i \frac{(x_i - x)^4}{4} + x_i^2 \frac{(x_i - x)^3}{3} \right] + \frac{M_i}{21i} \left[\frac{(x - x_{i-1})^5}{5} + 2x_{i-1} \frac{(x - x_{i-1})^4}{4} \right. \\ &\quad \left. + x_{i-1}^2 \frac{(x - x_{i-1})^3}{3} \right] + \left[\frac{y_i - y_{i-1}}{1i} - \frac{1i}{6}(M_i - M_{i-1}) \right] \frac{x^3}{3} \Bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} \\ &= \frac{1i^2}{180} \left[181i^2(M_i - M_{i-1}) + 451i(M_i x_{i-1} + M_{i-1} x_i) + 30(x_{i-1}^2 M_i - x_i^2 M_{i-1}) - 10(M_i - M_{i-1})(x_i^2 + x_i x_{i-1} + x_{i-1}^2) \right] \\ &\quad + \frac{y_i - y_{i-1}}{3} (x_i^2 + x_i x_{i-1} + x_{i-1}^2) \\ &= \frac{1i^3}{180} \left[8(M_i - M_{i-1})1i + 15(M_{i-1} x_i + M_i x_{i-1}) \right] + \frac{y_i - y_{i-1}}{3} (x_i^2 + x_i x_{i-1} + x_{i-1}^2) \end{aligned}$$

Soit tous calculs faits :

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{11} \left[\frac{21i^4}{45}(M_i - M_{i-1}) + \frac{1i^3}{12}(M_{i-1} x_i + M_i x_{i-1}) + \frac{y_i - y_{i-1}}{3} (x_i^2 + x_i x_{i-1} + x_{i-1}^2) \right] - E^2[x]$$

VI.II.2 - Comparaison des granulométries à des distributions théoriques

La courbe granulométrique est représentée dans des axes semi-logarithmiques. Nous venons de voir que cette courbe n'est autre que la fonction de répartition du poids des grains en fonction de leur diamètre.

Il existe une loi théorique de distribution "loi de Galton" qui étudie la population théorique en fonction du logarithme du caractère. C'est le logarithme du caractère qui suit la loi de Laplace-Gauss.

Ici donc nous voulons comparer la distribution des poids en fonction du logarithme des diamètres, avec la distribution de Laplace-Gauss. L'ajustement de la distribution granulométrique à la loi de Laplace-Gauss est en principe impossible puisque la courbe de distribution de la première est tangente à l'axe des x pour 2 valeurs finies du caractère : $\log D_0$ et $\log D_{100}$ alors que celle de la 2ème est tangente à l'infini.

En fait, du côté des petits diamètres $\log D_0$ pourrait tendre vers l'infini, mais la fonction que nous avons choisi pour représenter la distribution des poids nous impose $\log D_0$ fini.

On peut s'intéresser principalement à 2 choses dans la courbe granulométrique :

- 1°) la courbe toute entière
- 2°) la courbe du côté des petits diamètres.

Dans le premier cas, nous proposons pour le moment une comparaison qualitative par la droite de Henry: la loi de répartition de Laplace Gauss est représentée par une droite en graduant correctement l'axe vertical.

Dans le 2ème cas, nous allons étudier l'aire sous la courbe de distribution au delà d'une valeur du caractère $x = 5 - \log (Dx)$

Pour la loi normale, cette valeur nous est donnée par les tables de Laplace-Gauss.

Pour la courbe granulométrique $S = F(x)$:

Nous prenons comme variable $F(x)$, nous calculons le x qui lui correspond et nous calculons la fréquence cumulée correspondant à cette valeur de x pour la loi de Laplace-Gauss.

Il faut passer en variable centrée réduite $t = \frac{x - E(x)}{\sigma(x)}$ pour pouvoir travailler sur la loi normale réduite de Laplace-Gauss.

VI.II.3 - Comparaison des paramètres de distribution avec les paramètres usuels de la granulométrie, et calcul des paramètres

Les paramètres de la distribution sont des fonctions du logarithme du caractère. D'où la difficulté de faire une comparaison avec le coefficient d'uniformité ou de courbure.

VI.II.3.1. Coefficient d'uniformité

$U = \frac{D_{60}}{D_{10}}$ caractérise l'uniformité de la granulométrie, c'est-à-dire indique si la courbe est étalée ou serrée.

Nous pourrions comparer donc directement U à l'écart type qui lui aussi est un caractère d'étalement, indépendant comme U de la valeur moyenne de la distribution.

VI.II.3.2 - Coefficient de courbure

$C_c = \frac{D_{30}^2}{D_{60} \cdot D_{10}}$ le coefficient de courbure caractérise lui aussi l'étalement de la granulométrie. Deux courbes granulométriques identiques mais décalées ont même coefficient de courbure. Il indique par contre en plus de U , l'importance des éléments de plus petits diamètres par rapport à toute la population.

Aussi, nous pourrions comparer C_c à l'écart type mais aussi à une combinaison de la moyenne et d'un diamètre de petit refus D_{20} , D_{10} ou D_5 .

Nous présentons à titre documentaire sans critique des résultats (granulométries non uniformes) le nuage des points U, σ_x ; C_c, σ_x Figures VI.2 et 2 bis.

VI.II.3.3 - Calcul des paramètres

U et C_c peuvent être calculés directement à partir des données. Le pourcentage de Filler nous est donné par l'ordonnée de la courbe spline pour l'abscisse $5 - \log. 74$.

Voir résultats planche des courbes, figure VI.1.

Il est un autre paramètre que nous pouvons faire calculer par l'ordinateur.

Fig. VI 2



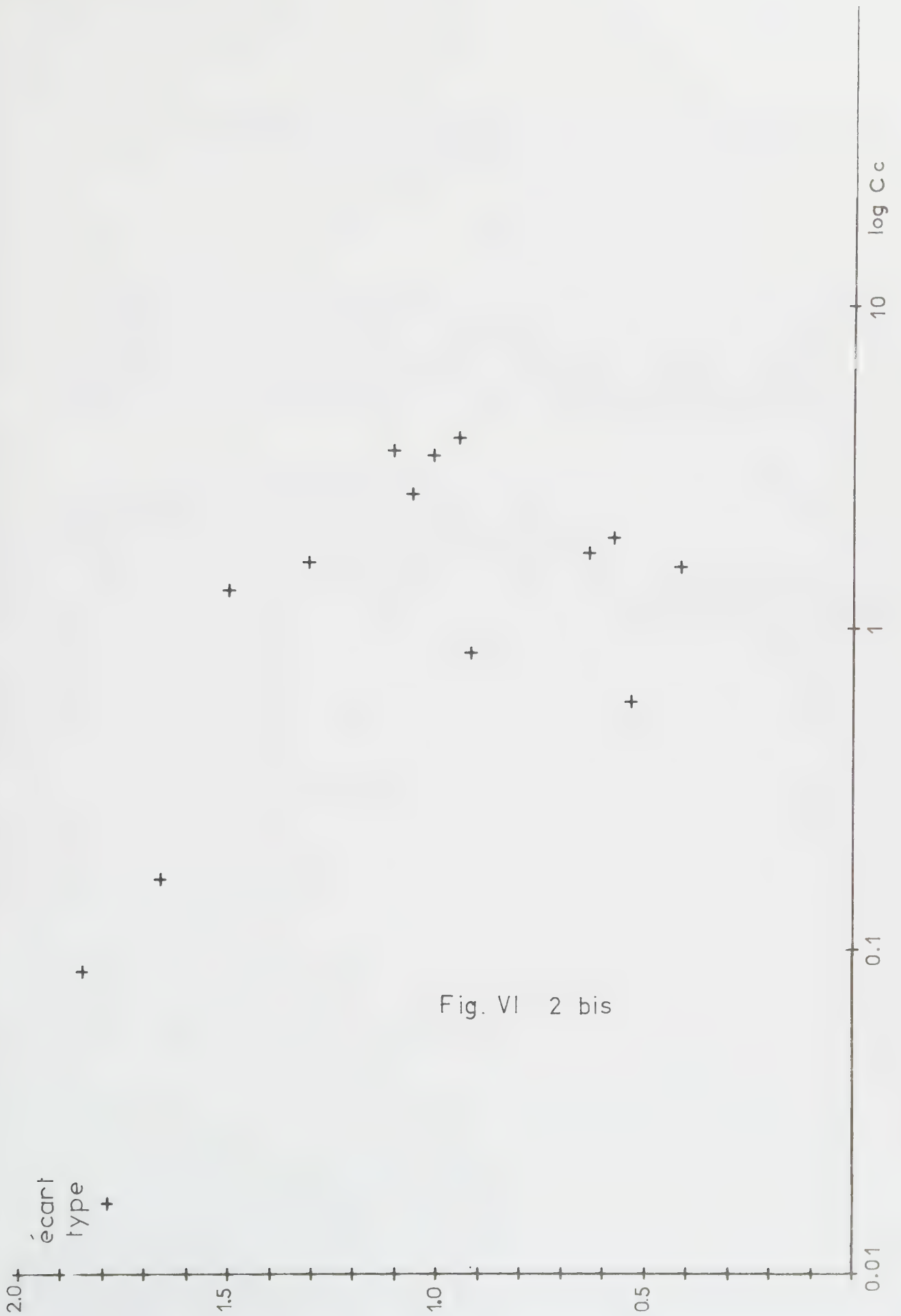


Fig. VI 2 bis

C'est la surface relative S_r qui peut être déduite du diagramme granulométrique, stocké en mémoire, par application de la formule de Zunker.

$$S_r = \frac{4,343}{\log d_2 - \log d_1} \left[\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right]$$

d_1 et d_2 étant exprimés en millimètres et représentant deux diamètres de fractions assez rapprochées du diagramme granulométrique, S étant la surface spécifique relative de chaque fraction. Le rapport des diamètres ne peut dépasser la valeur $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,70$ car la formule de Zunker suppose que la partie de courbe granulométrique comprise entre d_1 et d_2 est une ligne droite.

La surface spécifique relative d'un échantillon déterminé de masse 1 s'obtient en calculant, par la formule de Zunker, les surfaces spécifiques relatives successives de chacune des fractions d_1, d_2, d_3 , puis en les multipliant par le poids en grammes correspondant $F(d_i) - F(d_{i-1})$ et en divisant la somme des produits obtenus par le poids de l'échantillon en grammes (soit 1) en ne tenant pas compte du poids des particules plus petites que 20μ .

7ème Chapitre

ETUDE D'UNE LOI DE COMPORTEMENT PARTICULIERE :
LA CONSOLIDATION

VII.I - MATERIAL MATHEMATIQUE

Comme pour la courbe granulométrique, les informations sur la consolidation sont des points de la courbe $e, \log \sigma$.

Pour obtenir toute la courbe, nous utiliserons la fonction spline avec comme paramètres :

$$x_1 = \log 0,1 \quad , \quad x_2 = \log 0,5 \quad \dots \quad x_6 = \log 8$$

pour la courbe de décharge.

$$y_1 = e_{\sigma_{0,1}} \quad \quad \quad y_6 = e_{\sigma_8}$$

$$x'_1 = \log 0,1 \quad x'_2 = \log 1 \quad x'_3 = \log 8$$

$$y'_1 = e_{\sigma_{0,1}} \quad y'_2 = e_{\sigma_1} \quad y'_3 = e_{\sigma_8}$$

En fait en données nous rentrons la valeur d'un paramètre de tassement, l'indice des vides e , la déformation relative $\epsilon = \frac{\Delta h}{h_0}$ et la teneur en eau de saturation.

Nous travaillerons avec le paramètre e

$$w_{sat} = \frac{e}{G}$$

$$e = G w_{sat}$$

$$e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{V - V_s}{V_s} = \frac{Sh_0 - V_s}{V_s} = \frac{S(h_0 - \Delta h) - V_s}{V_s}$$

$$e = e_0 - (e_0 + 1) \frac{\Delta h}{h_0}$$

avec $e_0 = \frac{G}{\gamma_d} - 1$ on tire

$$e = \frac{G}{\gamma_d} \left(1 - \frac{\Delta h}{h_0} \right) - 1$$

Pour obtenir la courbe totale, nous prolongeons la courbe spline par sa tangente aux points e_g , $\log 8$ pour la courbe de charge et e_g , $\log 8$ pour la courbe de décharge quand les 2 points seront distincts.

Le tracé de la courbe oedométrique est fait pour des charges descendant à 0,05 ou 0,01 bar. Nous prolongeons la courbe spline aussi vers ces valeurs.

VII.II - ETUDE DE LA COURBE

VII.II.1 - Les principaux résultats de BIAREZ

Dans une communication présentée au Comité Technique de la Société Hydrotechnique de France, le 22 Mars 1968, "Généralités sur les propriétés mécaniques des sols, nouveaux appareils de mesure, petites digues sur vases", Monsieur le professeur BIAREZ proposait à partir de l'étude de 21 individus de vases provenant de France, d'Afrique du Nord et d'extrême Orient, des résultats de très grand intérêt, dont voici les principaux.

Outre la vérification de la loi de TERZAGHI $C_c = 0,009(w_L - 10)$, il a constaté que l'indice des vides décroît de manière remarquablement linéaire avec la pression axiale dans un intervalle de 0,05 bar à 80 bar, dans des axes $\log \sigma$, e. C_c pente de cette droite est constant.

$$\frac{-\Delta e}{\Delta(\log_{10} \sigma)} = \beta \quad -\Delta e = \beta \frac{\Delta \sigma}{\sigma}$$

ce qui nous conduit à $-\frac{\Delta \sigma}{\Delta e} = \frac{\gamma}{\beta} \frac{\Delta \sigma}{\Delta e} = 1/\beta \sigma$

Soit

$$\bar{E} = \alpha \sigma$$

Il a aussi noté que la loi $\bar{E} = \alpha \sigma^n$ est parfois acceptable.

Les courbes de consolidation normale passent par un indice des vides e_L correspondant à la limite de liquidité $e_L = Gw_L$ pour une contrainte de l'ordre de 0,2 bar. Il propose d'admettre en toute première approximation une loi de compressibilité de la forme :

$$e - e_L = -C_c \log \frac{\sigma}{0,2}$$

VII.II.2 - Etude de 47 essais oedométriques

VII.II.2.1 - Reproduction graphique

Nous avons, à partir de 9 informations sur la courbe oedométrique, fait retracer par la machine cette courbe.

Quelques remarques sur ces tracés (figures VII.1 et 1 bis)

Courbe machine : trait gros

Courbe expérimentale : trait fin

Sur 12 tracés étudiés, deux présentent une superposition parfaite. Les 8 donnés ici montrent les principales limites du procédé utilisé.

Éliminons les différences dues à une non superposition parfaite des échelles.

Echantillons : 5 sur les abscisses, 16 sur les ordonnées.

1°/ La courbe de décharge machine est au-dessus de la courbe expérimentale entre 1 et 8 bars : échantillons 5, 10, 15, 16, 19, 26.

Cause : 3 points seulement pour obtenir la courbe de charge et forte courbure entre 1 et 8 bars.

2°/ Aux faibles pressions le procédé ne rend pas compte d'une éventuelle forte courbure, échantillons 10, 15, 17.

Cause : manque de points pour le tracé.

3°/ L'extrapolation de 0,1 à 0,05 bar par la tangente à la courbe spline à 0,1 bar n'est pas toujours satisfaisante ; échantillons : 10, 15, 17

Cause : lié au 2°/

4°/ L'extrapolation au delà de 8 bars par la tangente n'est pas toujours parfaite ; échantillons : 10, 17.

Néanmoins, on voit que les différences sont minimes, l'emploi de courbe spline du 2° ordre donne satisfaction.

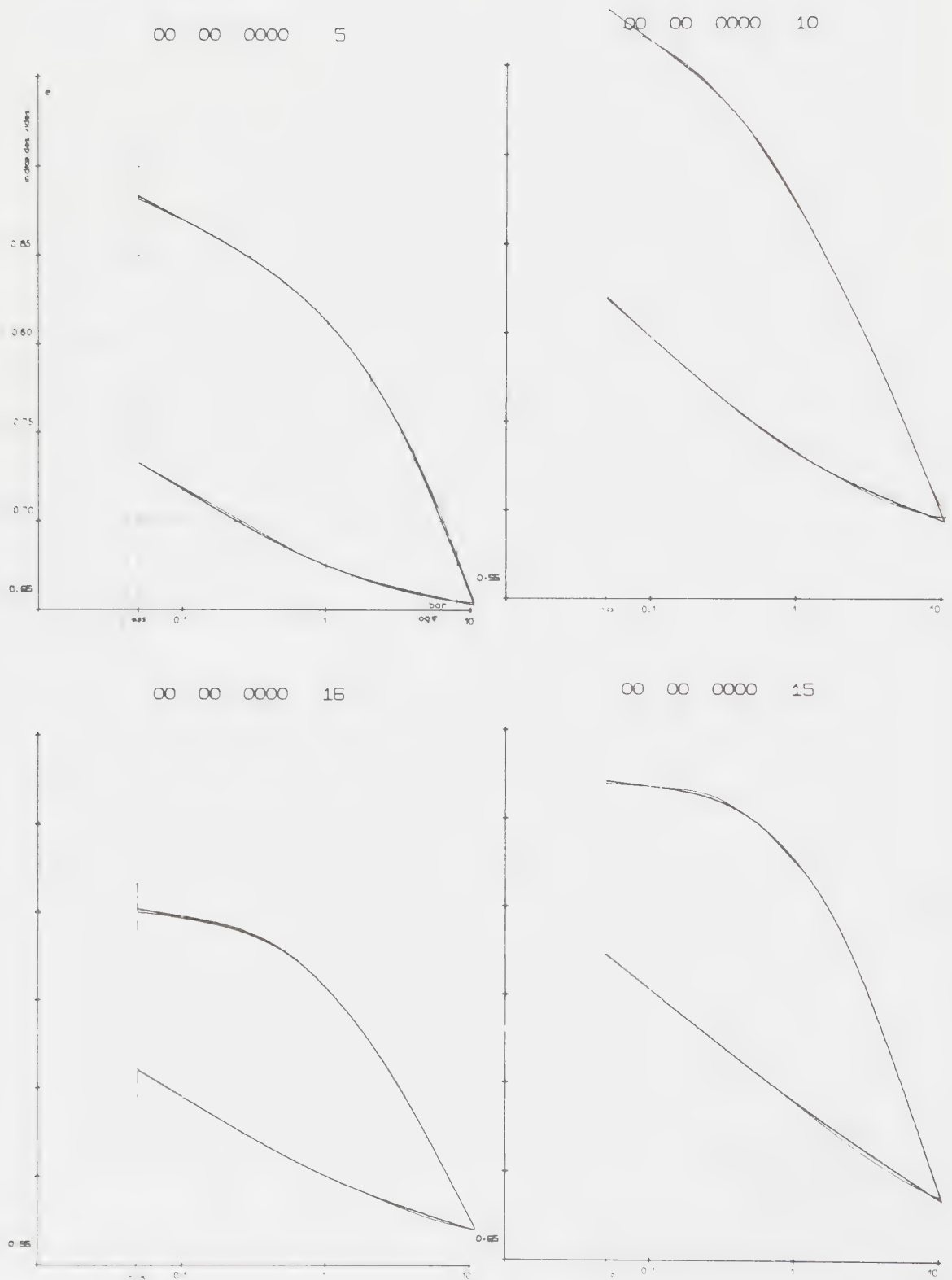
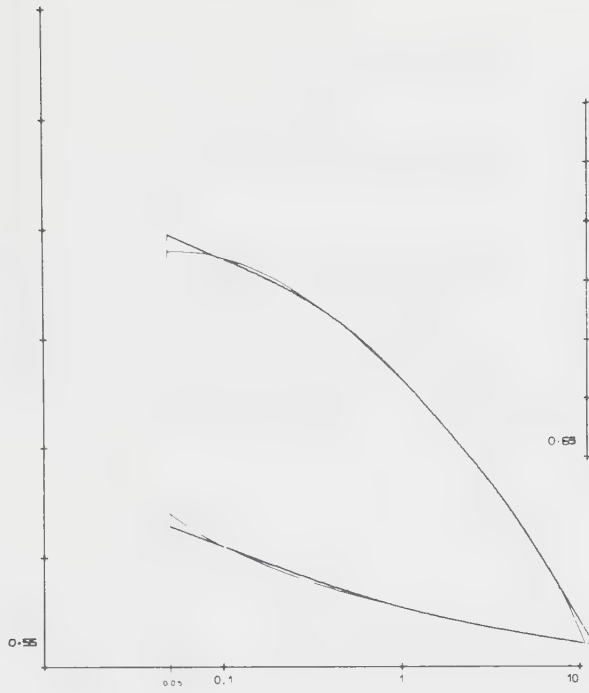
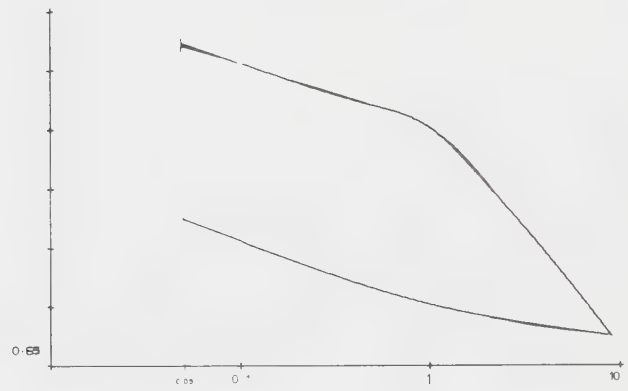


Fig. VII 1

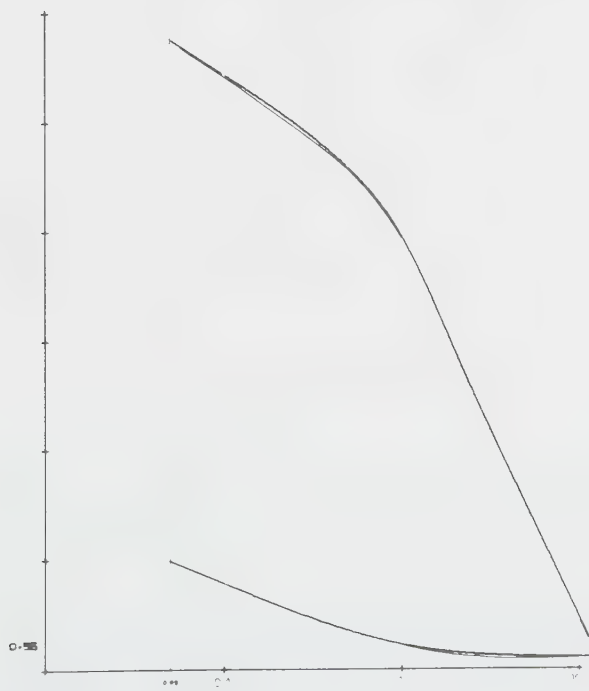
00 00 0000 17



00 00 0000 18



00 00 0000 19



00 00 0000 26

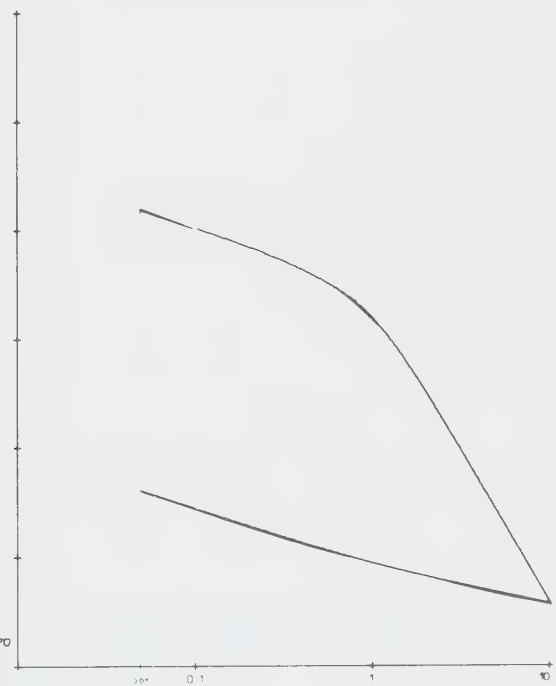
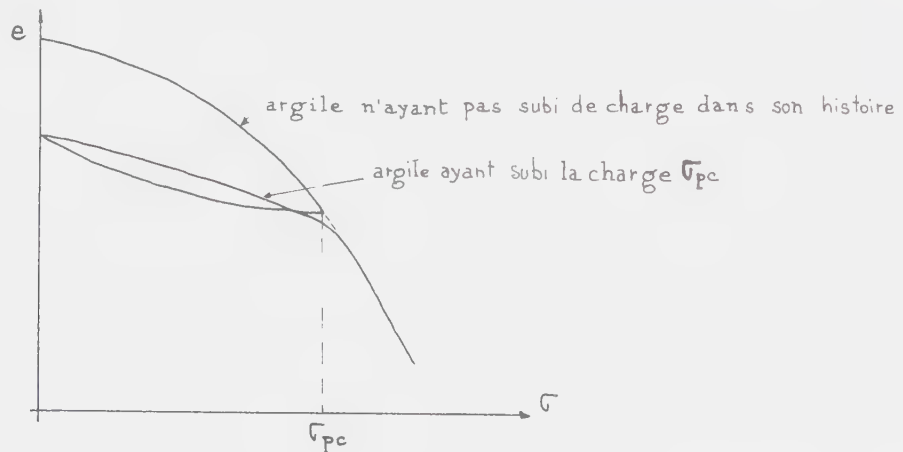


Fig. VII 1 bis

On éliminerait les différences en prenant plus de points pour le tracé, notamment pour la courbe de décharge.

Notons enfin une particularité des courbes splines.

La pression de préconsolidation d'une argile est donnée sur la courbe oedométrique par le point où la courbure est maximum et présente une valeur nettement supérieure à ce qu'elle est en général.



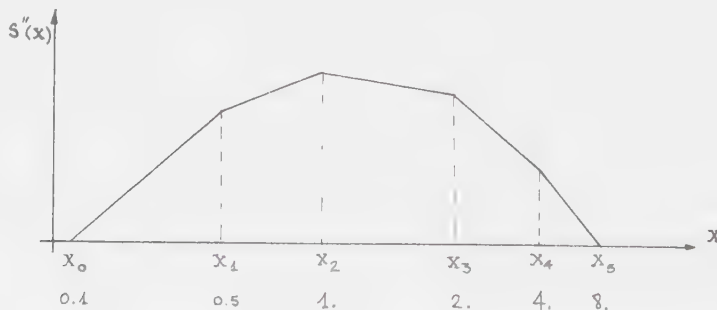
Or la fonction spline s , étant formée dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ de polynômes $P_i(x)$ du 3ème degré qui ont les propriétés suivantes :

$$P_i(x_i) = P_{i+1}(x_i) = y_i \quad (i = 1, \dots, n-1) \text{ et } P_1(x_0) = y_0 \quad P_n(x_n) = y_n$$

$$P_i^{(1)}(x_i) = P_{i+1}^{(1)}(x_i) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1$$

$$P_1''(x_0) = P_n''(x_n) = 0$$

La fonction s'' a un graphe continu formé de segments de droites.



La courbure maximum se trouve en un point X_i c'est-à-dire pour 0,1, 0,5, 1, 2, 4 ou 8 bars.

Nous ne pouvons donc pas, par les courbes spline du 2ème ordre, déterminer la pression de préconsolidation.

VII.II.2.2 - Etude de C_c , p' , L

Pour 47 individus, nous avons procédé au tracé de la courbe oedométrique dans les axes I_L , $\log \sigma$, avec la tangente à la courbe au point de charge maximum (la valeur de cette pente dans les axes $(e, \log \sigma)$ est celle de $-C_c$). Cette tangente doit couper la droite $I_L = 1$ ($W = W_L$) pour une charge voisine de 0,2 bar et la droite $I_L = 0$ ($W = W_p$) pour une charge voisine de 7 bar.

En fait, nous avons obtenu des résultats très différents.

Tracé machine Fig. VII.2

a) - Première critique des résultats

1°) Critère granulométrique

Les limites d'Atterberg sont mesurées sur la partie passant au tamis N°40, soit de diamètre inférieur à 0,42 mm.

Si nous ne conservons que les individus répondant sensiblement à ce critère (moins de 2,5% ne passant pas au tamis N°40) nous obtiendrons les résultats suivants (19 individus). Tracé machine, fig.VII.3.

2°) Loi de TERZAGHI *

Les 47 individus ne vérifient pas tous la loi de TERZAGHI. Sur la Figure VII.4 nous présentons les individus par région et qui satisfont au critère granulométrique.

On trouvera, d'autre part, dans le tableau 1, figure VII.5 les résultats obtenus pour C_c Terzaghi, C_c réel, σ_L et σ_p .

* Le critère "loi de Terzaghi" n'est pas de même nature que le critère granulométrique. Ce dernier ne peut être contesté puisqu'il s'appuie sur un critère propre à un sol: "les limites d'Atterberg sont mesurées sur la fraction de sol passant au



Fig VII 2

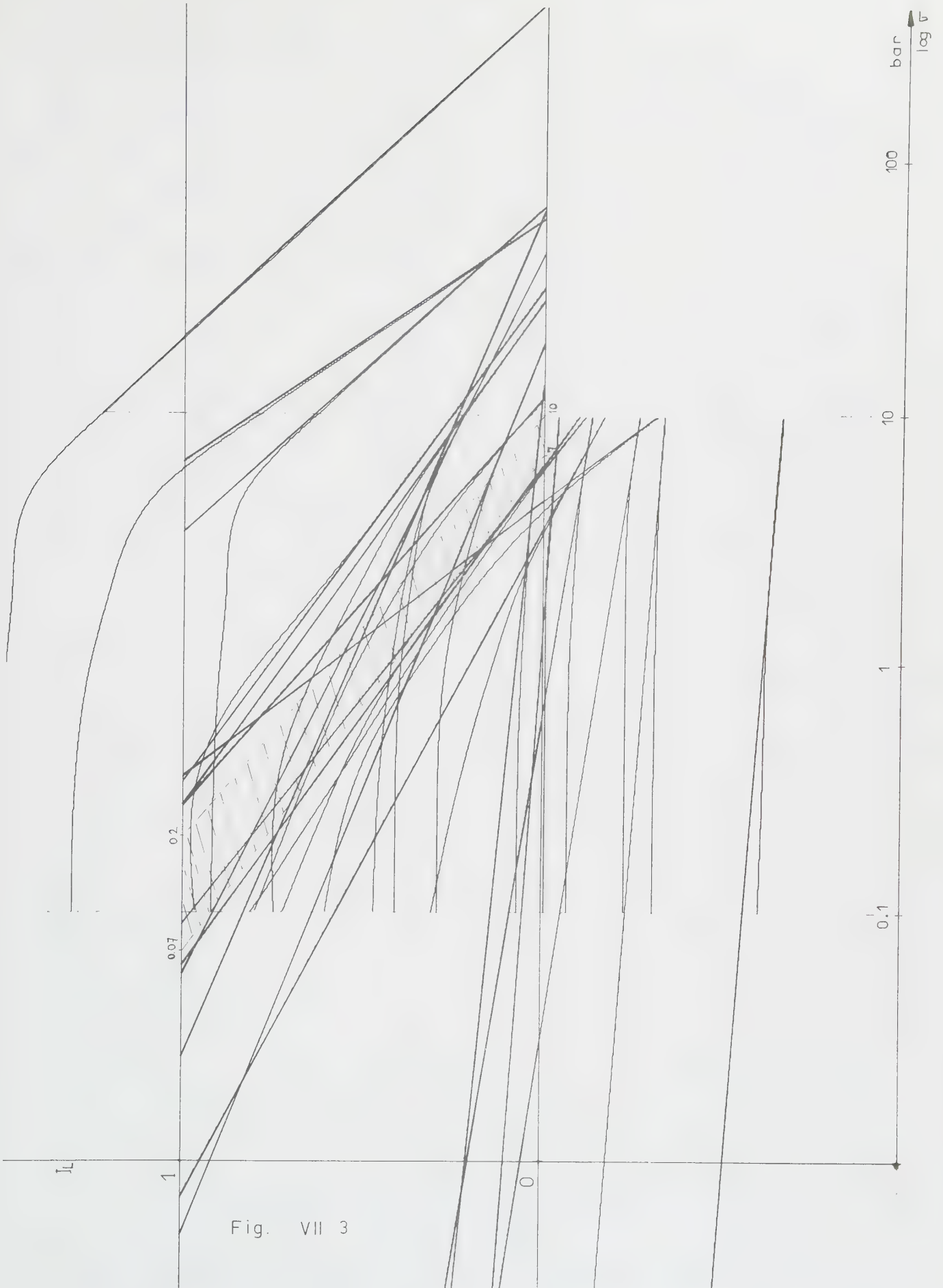


Fig. VII 3

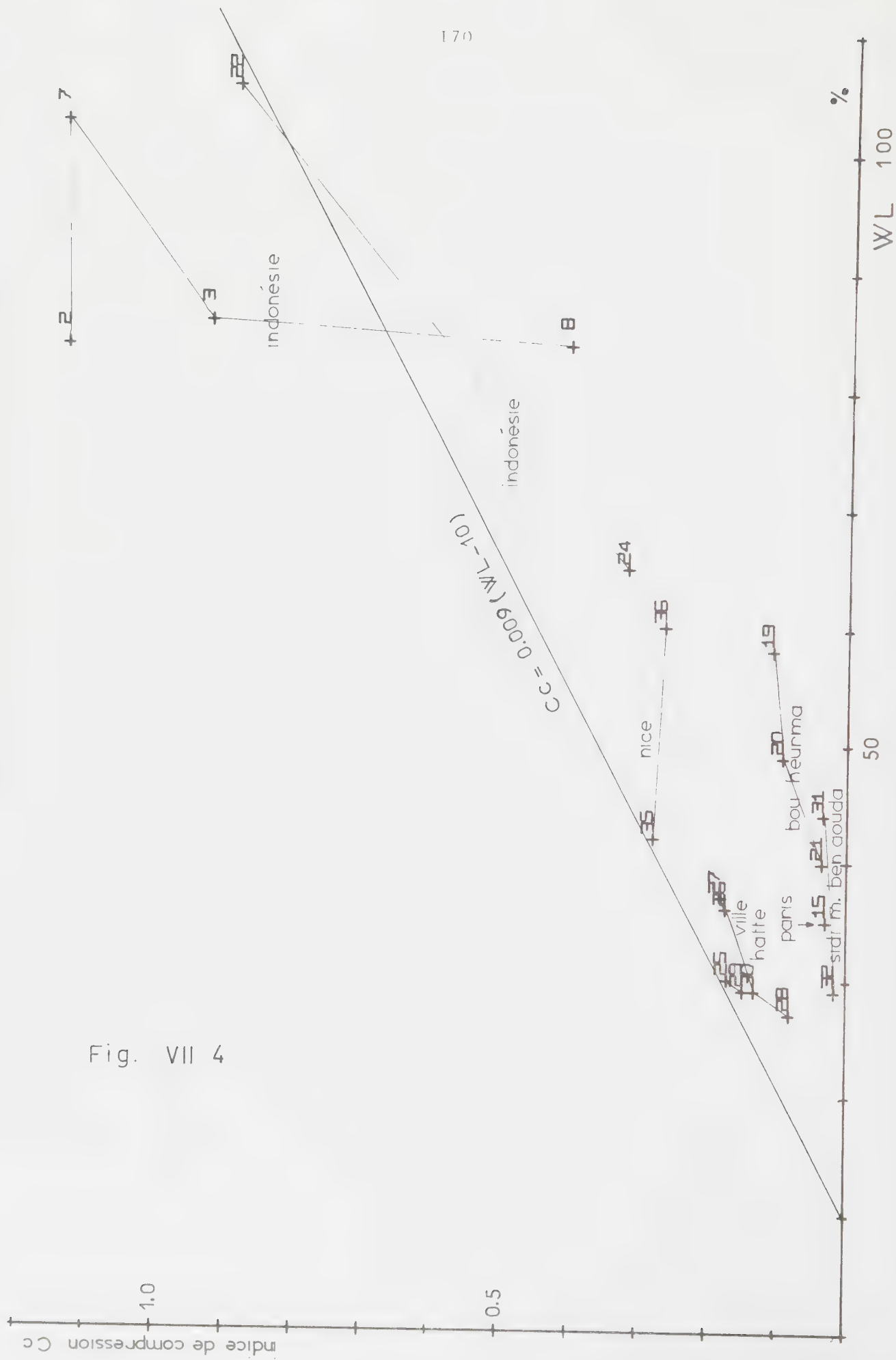


Fig. VII 4

TABLEAU 1

00 00 0000 1 CC TERZAGHI = 0.333 C REEL = 0.805 14.3757 54.2153	00 00 0000 17 CC TERZAGHI = 0.252 C REEL = 0.063 0.0000 3.7236	00 00 0000 33 CC TERZAGHI = 0.170 C REEL = 0.023 0.0000 12.2062
00 00 0000 2 CC TERZAGHI = 0.666 C REEL = 1.131 6.2870 59.3015	00 00 0000 18 CC TERZAGHI = 0.449 C REEL = 0.093 0.0000 0.6734	00 00 0000 34 CC TERZAGHI = 0.170 C REEL = 0.023 0.0000 12.1271
00 00 0000 3 CC TERZAGHI = 0.683 C REEL = 0.923 19.7018 411.5046	00 00 0000 19 CC TERZAGHI = 0.431 C REEL = 0.108 0.0000 0.0305	00 00 0000 35 CC TERZAGHI = 0.287 C REEL = 0.279 0.2681 28.4206
00 00 0000 4 CC TERZAGHI = 0.683 C REEL = 0.908 36.5263 335.2903	00 00 0000 20 CC TERZAGHI = 0.350 C REEL = 0.092 0.0000 0.6082	00 00 0000 36 CC TERZAGHI = 0.449 C REEL = 0.264 0.0051 19.2103
00 00 0000 5 CC TERZAGHI = 0.819 C REEL = 0.182 0.0000 71.7736	00 00 0000 21 CC TERZAGHI = 0.269 C REEL = 0.035 0.0000 1.2688	00 00 0000 37 CC TERZAGHI = 0.233 C REEL = 0.170 0.0066 1.0938
00 00 0000 6 CC TERZAGHI = 0.648 C REEL = 0.304 0.0285 137.9046	00 00 0000 22 CC TERZAGHI = 0.863 C REEL = 0.888 0.3330 31.8009	00 00 0000 38 CC TERZAGHI = 0.152 C REEL = 0.073 0.0000 0.5529
00 00 0000 7 CC TERZAGHI = 0.837 C REEL = 1.134 3.3048 66.5017	00 00 0000 23 CC TERZAGHI = 0.360 C REEL = 0.327 26.7686 *****	00 00 0000 39 CC TERZAGHI = 0.152 C REEL = 0.106 0.0046 0.9064
00 00 0000 8 CC TERZAGHI = 0.666 C REEL = 0.404 0.0264 64.2421	00 00 0000 24 CC TERZAGHI = 0.495 C REEL = 0.318 0.0569 43.3760	00 00 0000 40 CC TERZAGHI = 0.135 C REEL = 0.088 0.0068 3.7304
00 00 0000 9 CC TERZAGHI = 0.170 C REEL = 0.191 5.9427 15.0115	00 00 0000 25 CC TERZAGHI = 0.179 C REEL = 0.170 0.3489 4.4549	00 00 0000 41 CC TERZAGHI = 0.170 C REEL = 0.085 0.0002 1.3445
00 00 0000 10 CC TERZAGHI = 0.287 C REEL = 0.095 0.0000 2.2018	00 00 0000 26 CC TERZAGHI = 0.233 C REEL = 0.174 0.0607 6.2206	00 00 0000 42 CC TERZAGHI = 0.161 C REEL = 0.095 0.0007 1.6356
00 00 0000 11 CC TERZAGHI = 0.233 C REEL = 0.079 0.0000 1.9557	00 00 0000 27 CC TERZAGHI = 0.242 C REEL = 0.180 0.0512 3.1778	00 00 0000 43 CC TERZAGHI = 0.152 C REEL = 0.075 0.0005 4.0061
00 00 0000 12 CC TERZAGHI = 0.260 C REEL = 0.094 0.0000 1.5715	00 00 0000 28 CC TERZAGHI = 0.152 C REEL = 0.080 0.0072 3.4734	00 00 0000 44 CC TERZAGHI = 0.161 C REEL = 0.074 0.0000 0.6992
00 00 0000 13 CC TERZAGHI = 0.252 C REEL = 0.140 0.0213 46.0803	00 00 0000 29 CC TERZAGHI = 0.170 C REEL = 0.148 0.2710 11.6747	00 00 0000 45 CC TERZAGHI = 0.170 C REEL = 0.076 0.0000 0.480
00 00 0000 14 CC TERZAGHI = 1.503 C REEL = 0.413 0.0000 0.3480	00 00 0000 30 CC TERZAGHI = 0.170 C REEL = 0.132 0.0894 6.0477	00 00 0000 46 CC TERZAGHI = 0.143 C REEL = 0.081 0.0004 0.260
00 00 0000 15 CC TERZAGHI = 0.224 C REEL = 0.031 0.0000 13.2271	00 00 0000 31 CC TERZAGHI = 0.305 C REEL = 0.034 0.0000 0.0000	00 00 0000 47 CC TERZAGHI = 0.135 C REEL = 0.09 0.0027 0.6819
00 00 0000 16 CC TERZAGHI = 1.565 C REEL = 0.214 0.0000 0.0183	00 00 0000 32 CC TERZAGHI = 0.170 C REEL = 0.016 0.0000 0.0000	Fig. VII 5

En ne prenant en compte que les résultats pour lesquels C_c Terzaghi et C_c réel ne varient que du simple au double, nous obtenons le résultat indiqué par le graphique (29 individus) figure VII.6 .

En ne prenant en compte que ceux où , $0,75 < \frac{C_c \text{ réel}}{C_c \text{ Terzaghi}} < 1,35$, nous obtenons les résultats indiqués par le graphique (12 individus) figure VII.7.

Terzaghi n'a avancé la loi $C_c = 0,009(w_L - 10)$ que pour les sols non surconsolidés. Or, bon nombre d'individus proviennent de sols ayant connus certainement des charges supérieures à 10 bars dans leur histoire. L'étude du tassement n'ayant pas été faite au delà de 10 bars, nous sommes en droit de dire que bon nombre d'individus ne sont pas insérables dans l'étude.

Pour confirmer cette idée, nous prendrons simplement des individus venant d'une même région "Ville hatte" et prélevés dans des couches de surface (entre 1,5 m et 5,5 m), ces couches sont donc des dépôts récents vraisemblablement post glaciaires et n'ont donc pas subi de charges importantes dans leur histoire ; le C_c calculé pour 10 bar est significatif. Fig.VII.8 et 8 bis.

3°) Loi de Terzaghi et critère granulométrique

Si maintenant nous tenons compte des 2 critères :

- sols normalement consolidés,
 - granulométrie inférieure à 0,4 mm (à 2,5 % près),
- nous obtenons les résultats suivants (13 individus ou 8 individus), figure VII.9.

tamis N°40 ASTM", elles ne sont donc représentatives que de cette fraction. Par contre la loi de Terzaghi est une loi tirée de l'observation. Tout chercheur peut la contester en apportant d'autres observations.

Le critère granulométrique est un critère absolu.

Le critère loi de Terzaghi est un critère correct dans l'état actuel de nos connaissances.

On notera que l'individu 23 n'était autre qu'un sable argileux et le 4 un limon plastique dont nous n'avons pas la granulométrie.

Enfin, si nous mettons de côté les 3 individus en provenance d'Indonésie* (3,7 et 22) de poids spécifique sec très faible (0,68 , 0,79 et 0,77) il nous reste 5 individus, fig. VII.10.

La moyenne pour σ_L est 0,21 bar
pour σ_P est 11,36 bar

Si nous calculons en échelle logarithmique

$$\log \bar{\sigma}_P = \frac{1}{5} \sum_1^5 \log \sigma_P \quad \text{on trouve} \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_L &= 0,17 \text{ bar} \\ \bar{\sigma}_P &= 8,86 \text{ bar} \end{aligned}$$

On voit donc qu'a priori, on n'est nullement en droit de rejeter les hypothèses $\sigma_L = 0,2 \text{ bar}$ $\sigma_P = 7 \text{ bar}$.

* Note sur les argiles Indonésiennes

Ces argiles présentent un γ_d très faible, inférieur à $0,80 \text{ g/cm}^3$ et des densités de grains faibles, de l'ordre de 2,60.

Leur indice des vides est respectivement 2,96 , 2,41 , 2,31
et les teneurs en eau de saturation de 112 % , 90% , 91%
Les mesures expérimentales de W_{sat} avant l'essai donnaient :
109% 98% 103%

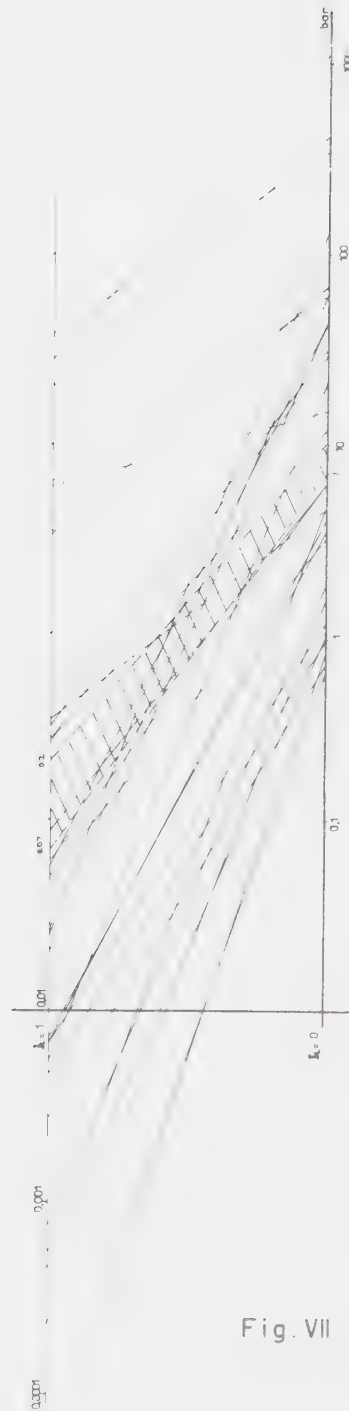


Fig. VII 6

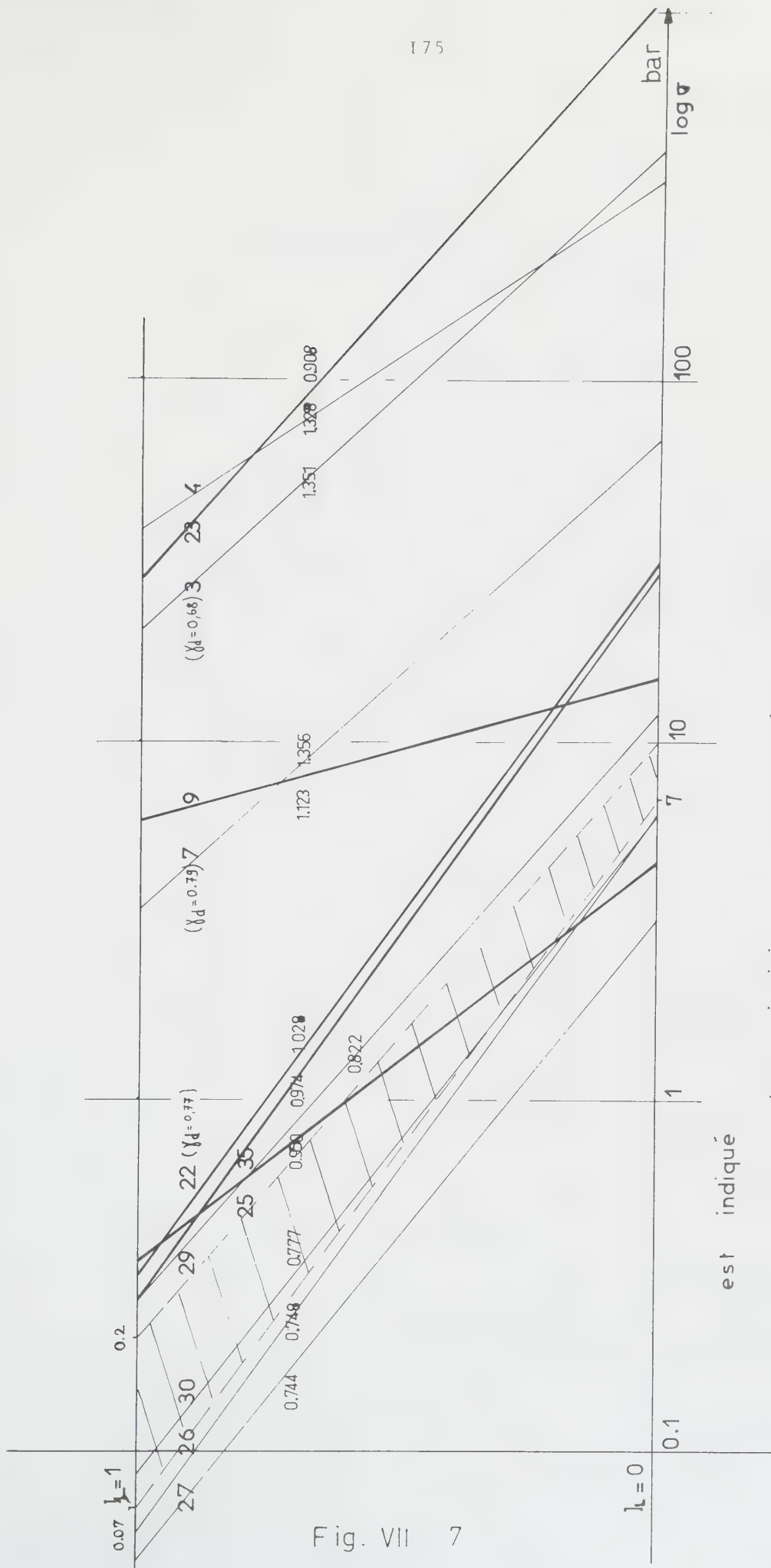


Fig. VII 7

pour les 3 argiles
indonésiennes: 3.7.22

pour chaque individu

son numéro de fichier 7

le rapport $\frac{C_c \text{ réel}}{C_c \text{ Terzaghi}}$ 1.356

la densité sèche ($\gamma_d = 0.73$)

VILLE HATTE

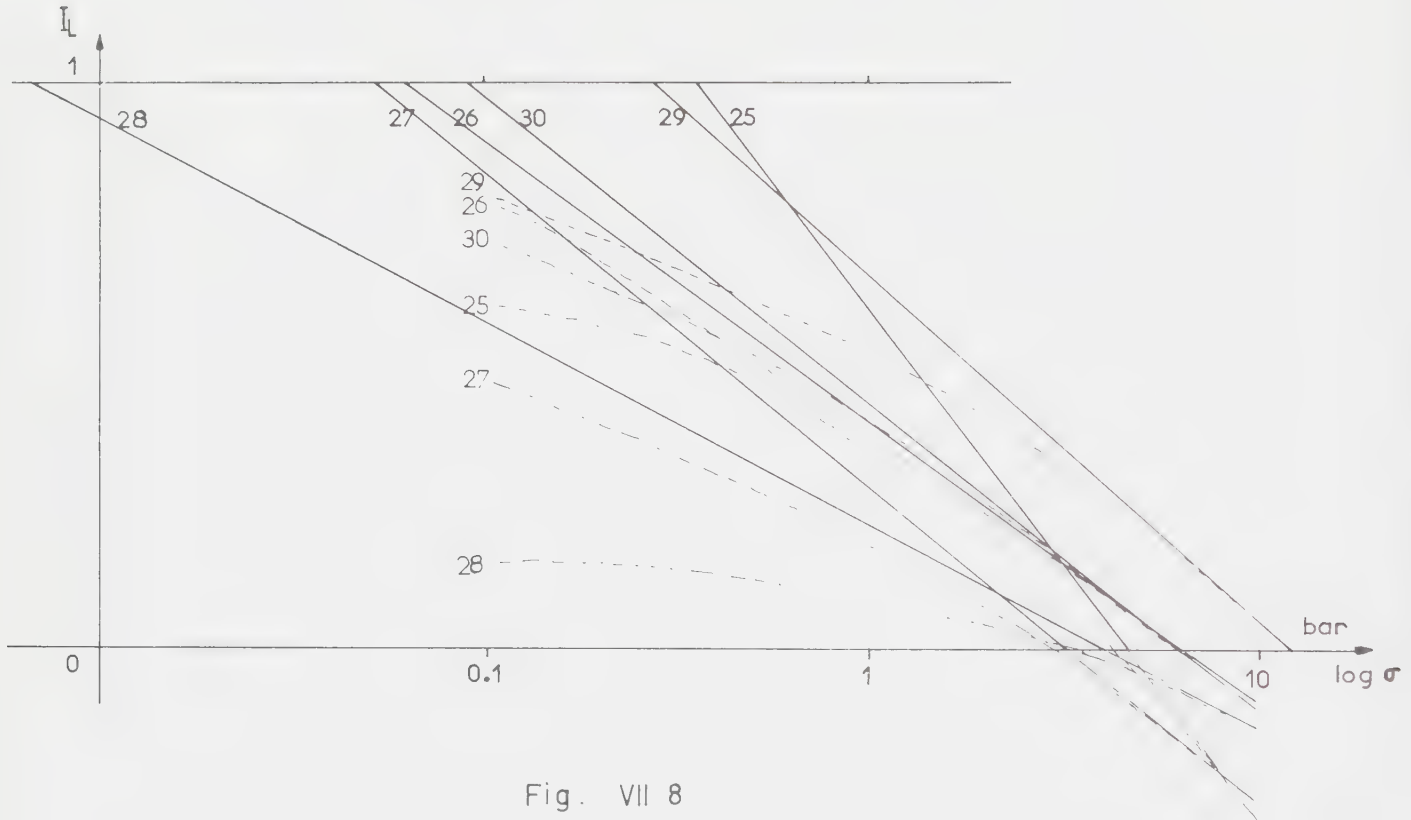


Fig. VII 8

PROVENANCE DES INDIVIDUS

1]	17]	33]	RENAULT Boulogne
2]	18]	34]	
3 HÔTEL BANTENG	19 BOU HEURTMA	35]	NICE
4 Indonésie	20]	36]	Square Albert 1er
5]	21]	37]	
6]	22]	38]	
7]	23 à DJAKARTA	39]	
8]	24 (Indonésie)	40]	BARRAGE DE
9 : CANCHE (Le Touquet)	25]	41]	
10]	26]	42]	
11 PASSAIRE	27 Barrage de la	43]	GREUX
12]	28 VILLE HATTE	44]	
13 LA CHAPELLE (Porte	29]	45]	
14 Périphérique	30]	46]	
15 Paris	31 Barrage de Sidi	47]	
16]	32 Mohamed Ben Aouda		

Courbes œdométriques de "Ville Hatte"

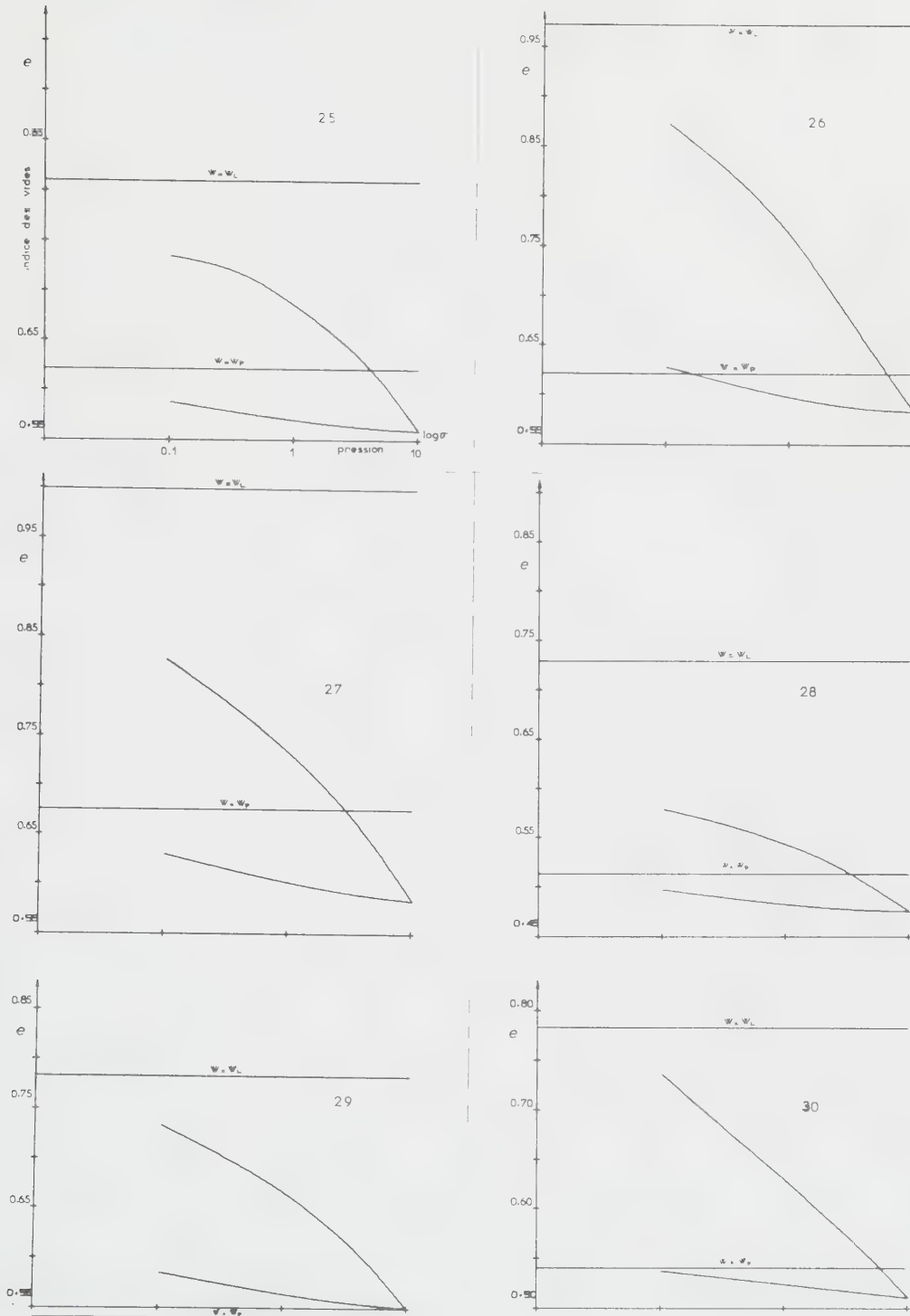


Fig. VII 8 bis

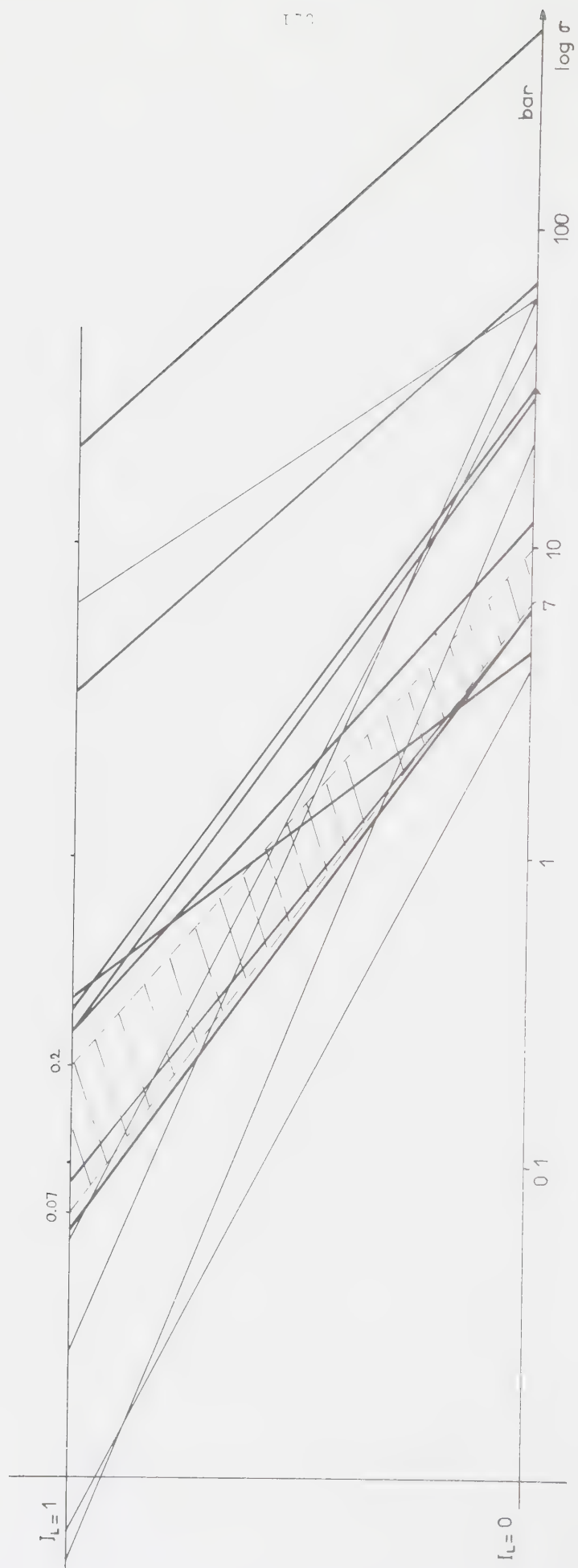
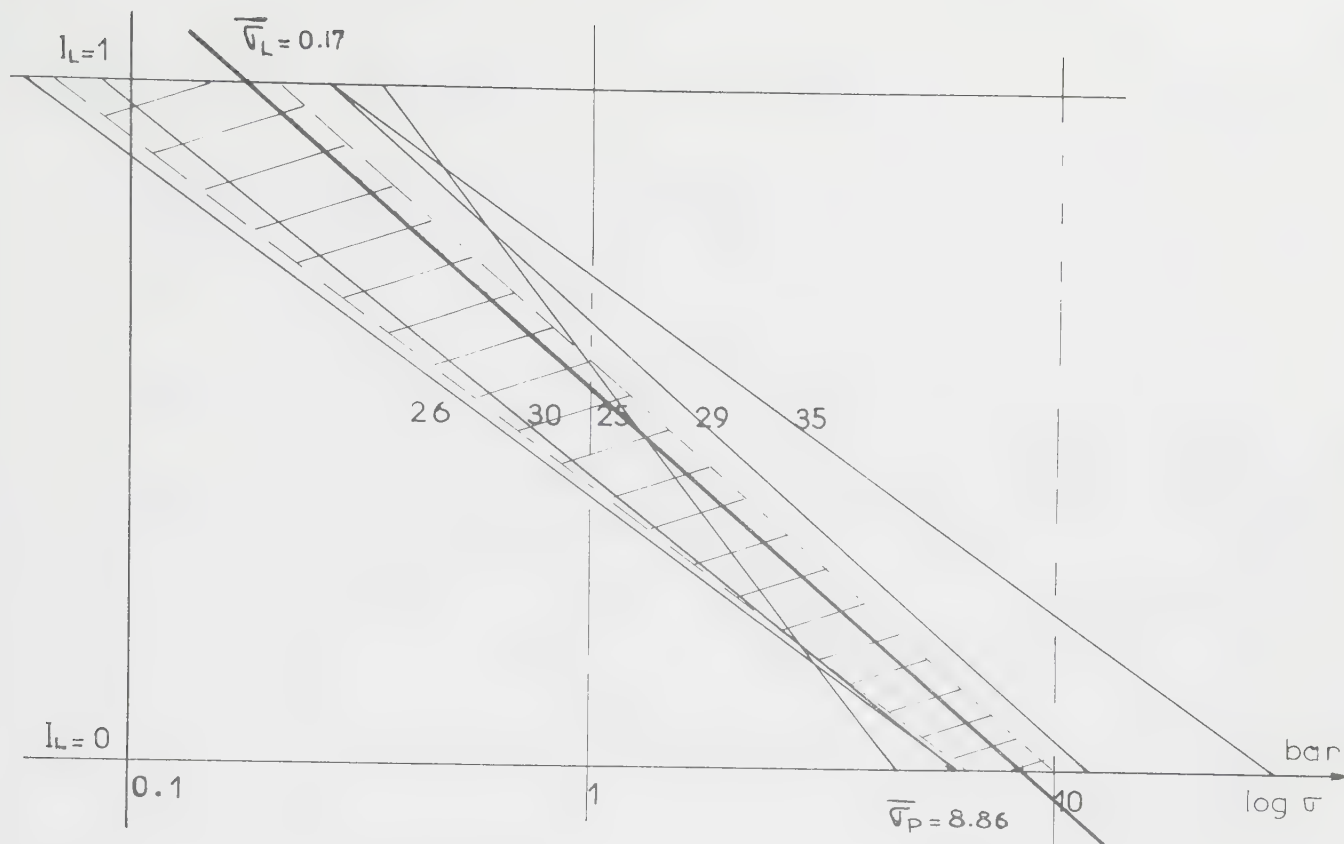


Fig. VII 9



N° individu	C_c réel	$\frac{C_c \text{ réel}}{C_c \text{ Tézaghi}}$	σ_L	σ_P	γ_d	I_P
25 ville Hatte	0.170	0.950	0.35	4.45	1.54	30 23 7
26 ville Hatte	0.174	0.748	0.06	6.22	1.37	36 23 13
29 ville Hatte	0.148	0.822	0.27	11.67	1.56	30 21 9
30 ville Hatte	0.132	0.777	0.09	6.05	1.42	29 20 9
35 Nice	0.279	0.974	0.27	28.42	1.40	42 21 21

Fig. VII 10

D) - Etude statistique

Il n'est pas possible d'entamer une étude statistique à partir de 8 ou 5 individus seulement, d'autant plus que la critique des résultats devrait être poussée encore plus loin.

Mais à titre d'exemple, nous reproduisons très succinctement une étude faite sur ces 47 individus, par 2 élèves de l'Ecole Centrale des Arts et Manufacture, NOIRET et MARTIN. Ils ont obtenu des résultats décevants, n'ayant pas tenu compte, entre autres, des deux critères définis plus haut.

1ère recherche

Variable aléatoire $W_{\sigma=0,2}$ $W_{\sigma=7}$
 Corrélations $W_L, W_{\sigma=0,2}$ $W_P, W_{\sigma=7}$

2ème recherche

Recherche de l'existence de ces corrélations pour d'autres valeurs de σ .
 Pour chaque valeur de la pression, calcul de W , $X = W - W_L$, $Y = W - W_P$

Pour chaque valeur de la pression, calcul de $C = \sum_1^{47} X^2$ $D = \sum_1^{47} Y^2$

Etude de C et D .

Si C passe par un minimum pour une certaine valeur de σ , cette valeur minimise le carré des écarts de W à W_L ; de même pour D .

Les valeurs trouvées sont 1,05 bar et 75 bar.

3ème recherche

Même recherche avec X et Y au lieu de X^2 et Y^2 .

Les valeurs trouvées sont 0,34 bar et 62,2 bar.

4ème recherche

Variable aléatoire $X = W - W_L$ et $Y = W - W_P$ pour une valeur de σ

Moyenne : $\bar{X} = \sum_1^{47} \frac{X}{47}$ $\bar{Y} = \sum_1^{47} \frac{Y}{47}$

Ecart type : $EX = \sqrt{\frac{\sum_1^{47} (X - \bar{X})^2}{47}}$ $EY = \sqrt{\frac{\sum_1^{47} (Y - \bar{Y})^2}{47}}$

Etude de la variation de $\bar{X}$, $\bar{Y}$, EX, EY en fonction de $\bar{U}$ entre 0,1 et 80 bars

$\bar{X}$ reste toujours négatif

$\bar{Y}$ s'annule pour $\bar{U} \approx 25$ bar

EY diminue régulièrement de 0,1 à 80 bar sans présenter de minimum pour 25 bar ; pour $\bar{U} = 25$ bar, $EY = 0,124$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheef, 75% des individus sont compris entre $\bar{Y} - 2 EY$ et $\bar{Y} + 2 EY$, soit pour $\bar{U} = 25$ bar

$$-0,25 < W - W_P < 0,25$$

$$W_P - 25\% < W_{sat} < W_P + 25\%$$

5ème recherche

Même recherche qu'en 4, en éliminant 11 individus provenant d'Indonésie.

6ème recherche

Variable aléatoire	$\bar{U}_L$	$\bar{U}_P$
$\bar{U}_L = 2,6$ bars	Ecart type = 7,86 bar	
$\bar{U}_P = 85$ bar	Ecart type = 304 bar	

2ème type d'étude

Etude de $I_P = aW_L + b$ $I_P = 0,73(W_L - 20)$ (I_P et W_P en pourcentage)

Etude du nuage de points (I_P , W_L) par la droite des moindres carrés en Y

$a = 0,55$ au lieu de 0,73

$b = -2,44$ au lieu de -14,6

et après suppression d'un point aberrant : $a = 0,627$

$b = -5,78$

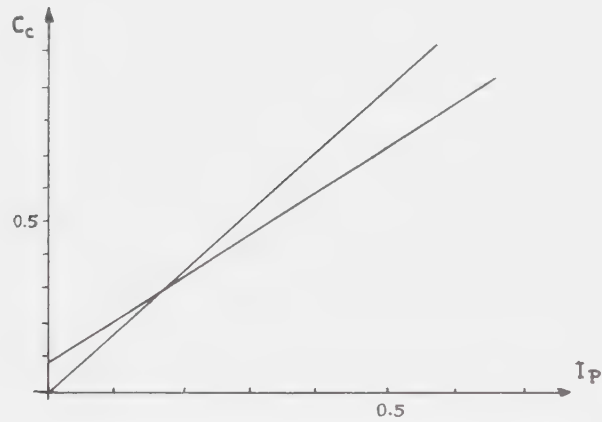
NOIRET et MARTIN ont terminé leur étude en tirant les conclusions de l'admissibilité des 2 hypothèses.

1° hypothèse $C_c = - \frac{e_7 - e_{0,2}}{\log 7 - \log 0,2} = - \frac{\gamma_s (W_P - W_L)}{\log 35}$ d'où $C_c \approx +1,75 I_P$

2° hypothèse

$$\left. \begin{array}{l} I_P = 0,73 (W_L - 0,20) \\ C_c = + 0,9 (W_L - 0,10) \end{array} \right\} C_c = + 0,9 \left(\frac{I_P}{0,73} + 0,10 \right)$$

$$C_c \approx 1,23 I_P + 0,09$$



Les 2 hypothèses ne pourraient être admises simultanément que dans le voisinage de $I_P = 0,20$ (20%)

8ème Chapitre

ESSAI DE CARTOGRAPHIE DU SITE DE GRENOBLE

VIII.I - CADRE GENERAL DE L'ETUDE

MM. BIGUENET, DAYRE et moi-même avons défini dans une communication au 1er Congrès International de Géologie de l'Ingénieur (Paris 70) les buts de notre étude.

"La connaissance des propriétés du sol est essentielle dans tout problème de construction et Génie Civil. Cependant, en particulier dans le bâtiment, la reconnaissance a la réputation de coûter trop cher. Il convient donc de l'exécuter à bon escient et avec une rentabilité maximale.

Une carte géotechnique donnant les grandes lignes de la nature des terrains en place permettra en particulier d'optimiser l'implantation des sondages. Cette cartographie est entreprise en stockant sur ordinateur les données fournies par un grand nombre de reconnaissances effectuées à Grenoble et dans ses environs. Ce stockage se fait à l'aide de 4 fichiers (échantillons, sondages, profils et données générales) dont les 2 premiers sont réalisés. Nous utilisons le calcul statistique pour l'étude des échantillons et des méthodes de calcul numérique assez élaborées comme les courbes "spline" et les surfaces de Coons pour exploiter les données du fichier sondage. Chaque résultat est affecté d'un indice de crédibilité ce qui permet de tracer à la demande les cartes particulières relatives à un site ou un problème donné".

Il s'agit donc d'étudier les alluvions du Grésivaudan, au point de vue de leur comportement mécanique et hydraulique.

Cette étude s'appuie sur 2 sortes de données.

La Géologie

Les alluvions quaternaires du Grésivaudan, à l'exception des formations morainiques peu concernées par cette étude, ont été peu étudiées. Leur structure

est dominée par le fait que l'Agglomération Grenobloise, située au confluent de deux rivières à régime et sédimentation différents, est bâtie sur des formations détritiques complexes d'argiles, limons, sables et graviers.

La Géotechnique

A toutes les données que nous avons dans la 2ème Partie, il faut rajouter des mesures de tassements d'ouvrages, d'accidents de fondations et d'affaissements de terrain.

Cette étude ne conduira pas à définir complètement la nature et les propriétés des sols de la région grenobloise, car une reconnaissance précise sera toujours nécessaire avant la réalisation d'un ouvrage.

Néanmoins, grâce aux reconnaissances déjà faites, il est possible de définir une probabilité de l'existence de couches de terrain et de connaître leurs propriétés moyennes.

Aux 2 fichiers "Lois rhéologiques" et "Zones homogènes", qui dans cette étude s'appelleraient plus justement "échantillons" et "sondages", il faut rajouter 2 fichiers :

- le fichier profils, dans lequel sont consignés les données à deux dimensions obtenues en particulier lors de l'exécution des reconnaissances géophysiques ;
- le fichier de données générales. Dans ce fichier devraient être regroupées les données sémantiques concernant par exemple les observations qualitatives sur la nature géotechnique des sols, sur le comportement des ouvrages, tassements et accidents et les observations de géologie fondamentale.

On se rend compte que l'étude d'un site ne se limite nullement à traiter avec toutes les techniques modernes souhaitables des logs de sondages ; en ce qui nous concerne nous avons seulement mis au point une méthode de traitement du fichier "zones homogènes" pour avancer dans le sens d'une cartographie automatique.

VIII.II - TRAITEMENT DU FICHIER "ZONE HOMOGENE"

VIII.II.1 - Recherche de la situation des couches en tout point

VIII.II.1.1 - Principe d'interpolation

Il s'agit de trouver des surfaces représentant le toit d'une couche par corrélation des différents sondages.

Nous utilisons pour cela des surfaces de "Coons" permettant l'interpolation entre 4 points et ne présentant pas de discontinuité des tangentes dans leurs raccordements.

Nous devons donc partir d'un réseau de points que nous étudierons 4 par 4 de proche en proche.

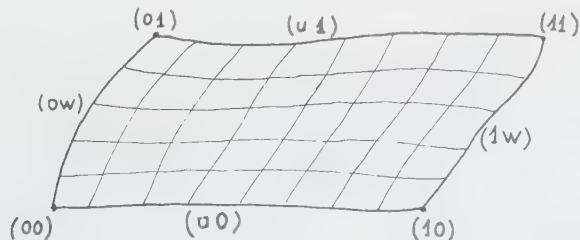
Surface de "Coons"

Soit une surface définie par les coordonnées paramétriques d'un point courant M. On utilise le symbole (uw) pour représenter une fonction de ces 2 variables.

$$M \quad \left| \begin{array}{l} x = x(uw) \\ y = y(uw) \\ z = z(uw) \end{array} \right.$$

Dans ce qui suit nous utiliserons la notation (uw) pour représenter l'équation de la surface.

Dans ce cas les symboles $(u0)$, $(u1)$, $(0w)$, $(1w)$ représenteront les courbes frontières de notre segment de surfaces et les symboles (00) (01) (10) (11) les coins de notre segment de surfaces.



La forme générale de l'équation de surface est :

$$\begin{aligned}
 (uw) = & (ow) F_0(u) + (1w) F_1(w) \\
 & + (uo) F_0(w) + (u1) F_1(w) \\
 & - (oo) F_0(u) F_0(w) - (o1) F_0(u) F_1(w) \\
 & - (10) F_1(u) F_0(w) - (11) F_1(u) F_1(w)
 \end{aligned}$$

où chaque terme est le produit d'un vecteur et de fonctions F (F_0, F_1) appelées "Blending functions" (fonctions de mélange).

Il n'y a aucune restriction sur la forme des courbes frontières sauf qu'elles se coupent 2 à 2 aux 4 coins.

Si on cherche les conditions que doivent remplir les fonctions F (on fera $u = 0, 1$ $w = 0, 1$) on trouve :

$$\begin{aligned}
 F_0(0) &= 1 & F_1(0) &= 0 \\
 F_0(1) &= 0 & F_1(1) &= 1
 \end{aligned}$$

On peut écrire la tangente à la surface suivant chaque direction

$$(uw)_u = \frac{\partial (uw)}{\partial u} \quad (uw)_w = \frac{\partial (uw)}{\partial w}$$

et en étudiant cette tangente sur les courbes frontières, on obtient (en imposant aux fonctions F les conditions $F'_0(0) = 0$ $F'_1(0) = 0$) comme équation de la tangente le long de la courbe (ow) dans la direction u :

$$(ow)_u = (oo)_u F_0(w) + (01)_u F_1(w)$$

Ceci montre que la tangente à une courbe frontière $(ow)_u$ ne dépend que de la tangente aux 2 coins : $(oo)_u$ $(01)_u$



La tangente est donc indépendante de la nature de la courbe frontière. Ceci implique que l'on pourra raccorder 2 segments de surfaces suivant la même courbe frontière et que la tangente sera continue si elle est la même pour les 2 segments de surfaces aux coins concernés.

On obtient la même continuité dans la direction w , en imposant
 $F'_0(1) = 0$ et $F'_1(1) = 0$

En résumé

$F_0 \begin{smallmatrix} u \\ \text{ou} \\ w \end{smallmatrix}$	0	1
F_0	1	0
F'_0	0	0

$F_1 \begin{smallmatrix} u \\ \text{ou} \\ w \end{smallmatrix}$	0	1
F_1	0	1
F'_1	0	0

Une fonction simple vérifiant ces conditions est la fonction polynomiale de 3^e degré

$$F_1(u) = 3u^2 - 2u^3$$

$$F_0(u) = 1 - F_1(u)$$

Courbes frontière cubique et surface bicubique

Soit des courbes frontière de la forme :

$$(U_0) = Au^3 + Bu^2 + Cu + D$$

et F_1 et F_0 définis comme ci-dessus.

L'équation de la surface sera alors

$$(uw) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} u^i w^j$$

surface facile à calculer et présentant la continuité des tangentes aux courbes frontières d'un segment de surface à l'autre.

On aurait par exemple pour la frontière (U_0)

$$D = (00)$$

$$C = (00)_u$$

$$A = 2(00) - 2(10) + (00)_u + (10)_u$$

$$B = -3(00) + 3(10) - 2(00)_u - (10)_u$$

VIII.II.1.2 - Distribution des sondages - Choix du réseau

Les sondages se distribuent suivant des groupements de 3 à 10 correspondants à un chantier ou suivant des points isolés. Groupements et sondages isolés sont répartis géographiquement de la façon la plus aléatoire, sans régularité de maille ou de direction. Il s'agit pour nous de définir un réseau maillé curviligne comprenant le minimum de lignes et le maximum de points sur chaque ligne. Le problème mathématique de sa détermination n'est pas résolu, nous choisissons pour le moment nous-mêmes les points qui seront sur une même ligne. Ces points sont, ou bien un sondage isolé, ou bien le barycentre d'un groupe de sondages ; pour ces derniers nous connaissons (par la méthode des petites surfaces de Coons) le plan tangent du toit de couche au barycentre. Les lignes joignant les points choisis seront des courbes "splines" qui minimisent la courbure. Nous approcherons ainsi au maximum de coupes rectilignes du terrain.

Sur la figure VIII.1, réduction au $\frac{1}{4}$ d'une planche au 1/5000 sortie sur table traçante du 1130 on voit l'implantation des 250 sondages répertoriés jusqu' alors. Ces sondages sont numérotés de 1 à 250 par la machine au fur et à mesure du stockage dans le fichier SO. Leur numéro est leur numéro de fiche.

La figure VIII.2 est le tracé machine à l'échelle 1/1000 (réduction 1/3 du réseau curviligne pour une petite zone d'étude ; en fait il y a deux réseaux distincts.

Les sondages sont appelés par leur numéro de fiche I1 (de 1 à 250), dans SO. L'abscisse curviligne de chacun sur chaque ligne est stocké par numéro de réseau dans un fichier SUR comprenant 1 seule fiche I2 = 1.

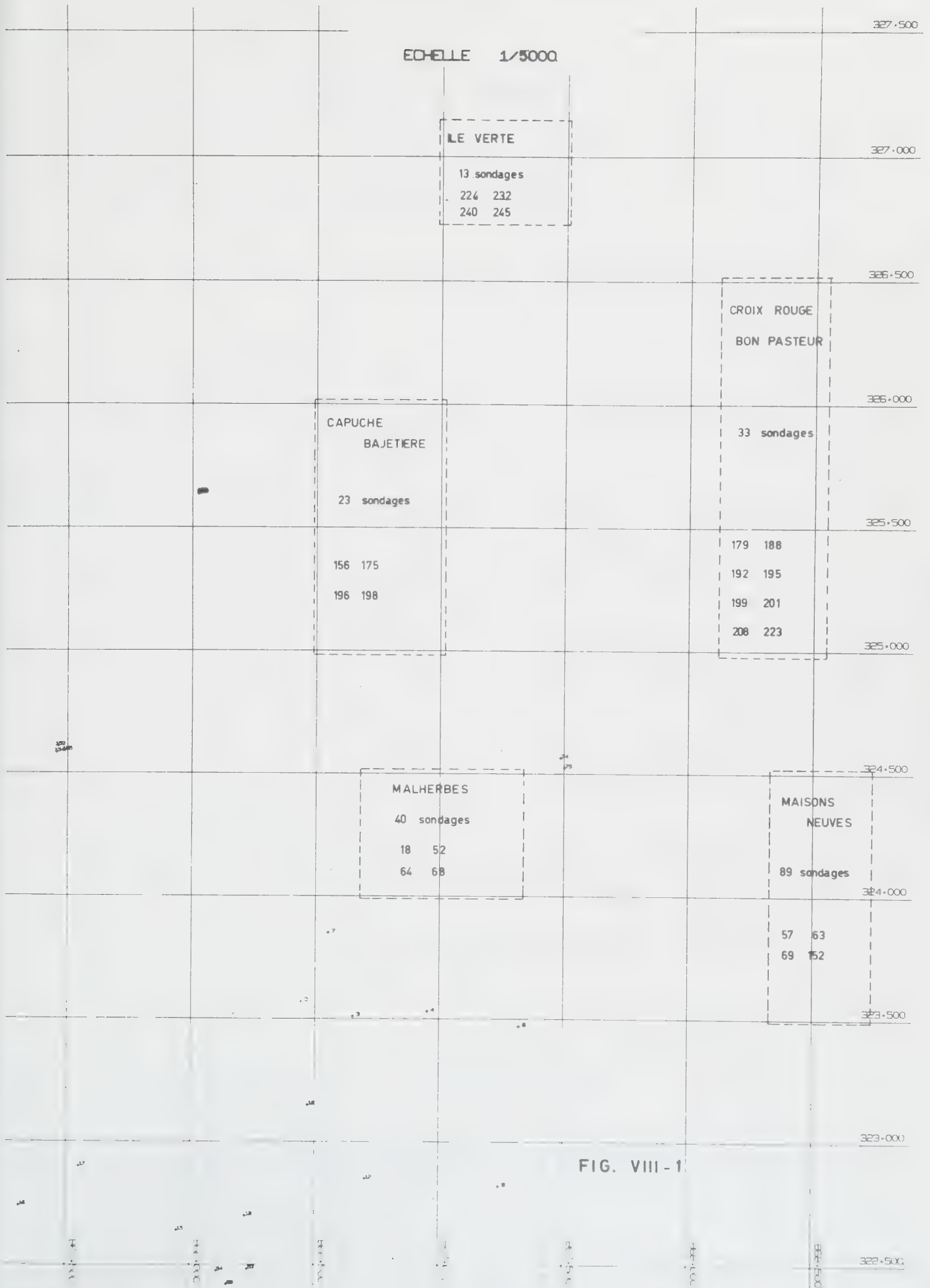
Exemple : Le sondage I1 = 41 a 2 numéros de réseau 13 et 54.

Les tangentes au réseau curviligne en chaque noeud sont stockées, de la même façon, dans un fichier TGSUR à une fiche I3 = 1.

VIII.II.1.3 - Etude d'un profil : coupe curviligne de terrain

Dans cette coupe nous avons à trouver le toit des couches à partir de leurs cotes (sondages isolés) ou de leurs cotes et pente (groupement de sondages), la pente étant l'intersection du plan tangent et du profil vertical curviligne.

GRENOBLE ET ECHIROLLES



GRENOBLE - MALHERBES

ECHELLE 1/1000

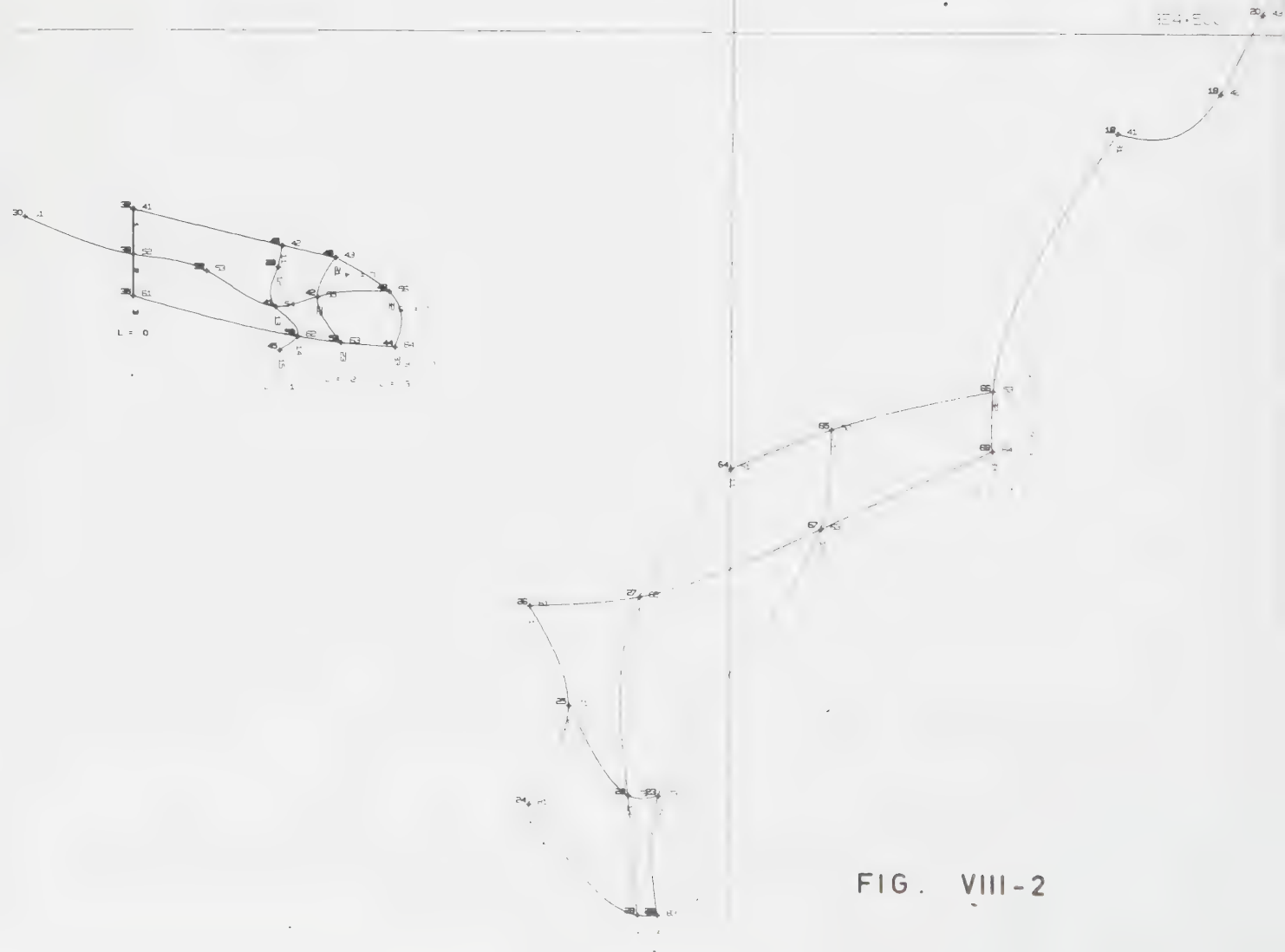


FIG. VIII-2

Nous employons la même méthode que précédemment, celle des courbes "spline" avec en plus des renseignements en certains points sur les tangentes. D'autre part, pour approcher au maximum de la réalité (les toits de couches ayant toutes les chances de présenter le minimum de courbure) nous pourrions lisser ces courbes dans la limite de la crédibilité accordée à chaque repérage vertical.

La figure VIII.3 montre les logs de sondage suivant les 7 profils curvilignes du groupement de gauche de la figure VIII.2.

La nature des couches a été notée avec un code à 25 lettres incluant la classification du "Bureau of Reclamations" et la classification simplifiée présentée dans la 2ème partie. Ce code est trop lourd et rend le dépouillement des logs très lourd.

C'est sur les profils comme ceux reproduits sur la figure VIII.3 que nous choisissons un numéro pour chaque couche.

Par le fait que d'un sondage à l'autre des couches (lentilles) peuvent disparaître ou apparaître, la numérotation des couches ne peut aller de 1 à 8 (ou 16 - sondage double) nous avons pris une numérotation de 1 à 30.

Il faut : 1°/ que le toit de chaque couche porte le même numéro d'un log à l'autre,

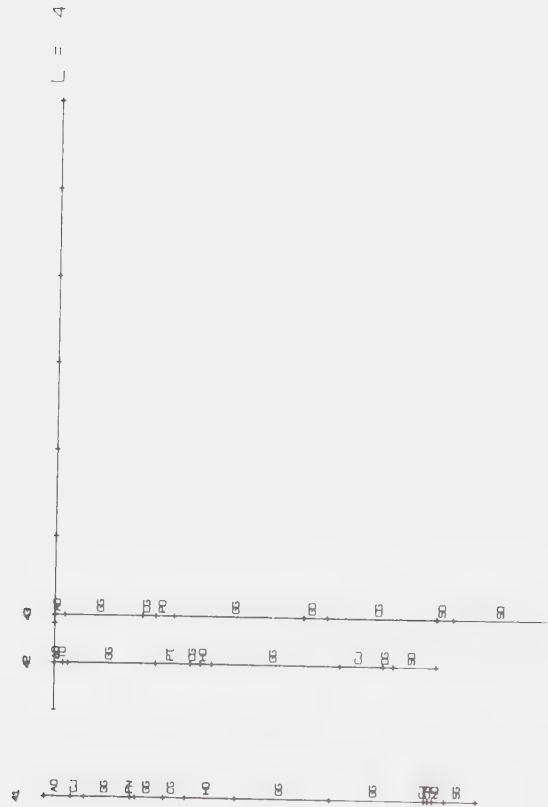
2°/ que la numérotation dans un même sondage sur ses 2 profils soient identiques. Ex : n°13 et N°54

Cette profondeur des toits des couches est stockée suivant cette numérotation dans le fichier APRO, comprenant 1 fiche par couche dans chaque sondage, soit 30 fiches par sondage et 1 seule profondeur par fiche.

Le numéro de fiche I14 est déterminé à partir du n° de réseau du sondage (Ex : 13) et du n° de couche dans ce sondage.

Ce fichier APRO est un fichier intermédiaire pour constituer le fichier PRO où on trouve dans une même fiche I4 les profondeurs dans chaque log des toits de la même couche dans tous les sondages, soit 30 fiches.

Sur les profils curvilignes, nous traçons par le procédé des courbes "spline" les toits des couches, et nous notons les pentes des tangentes au droit



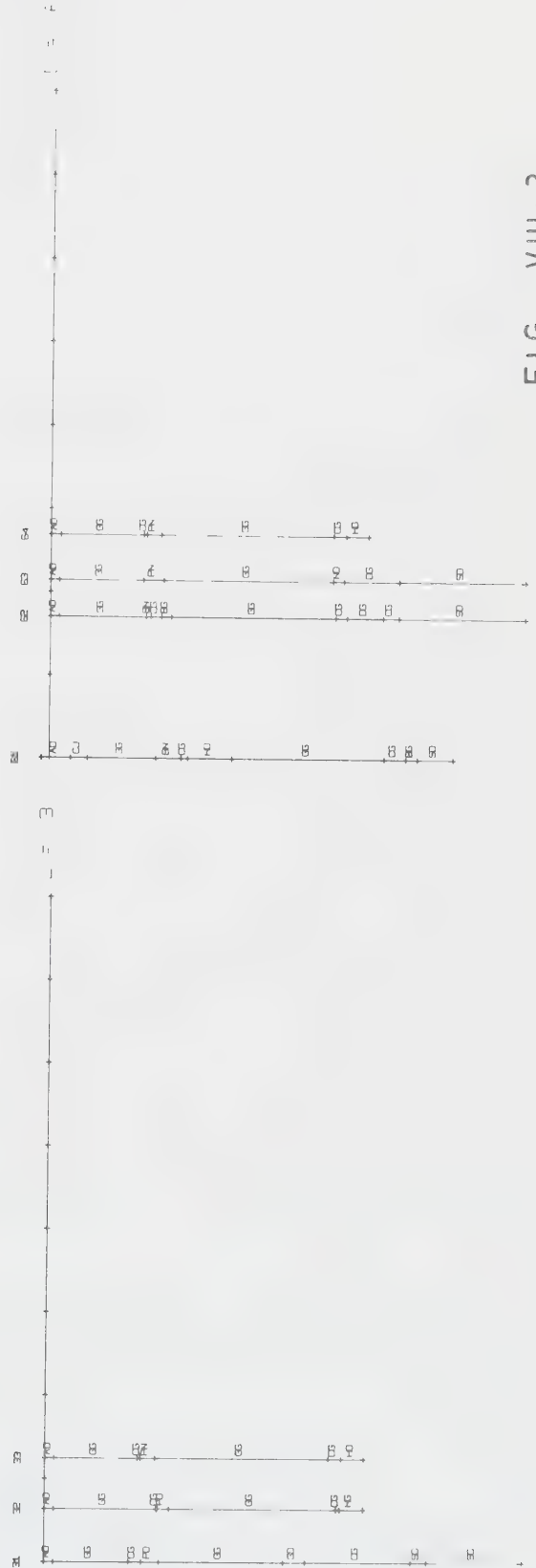
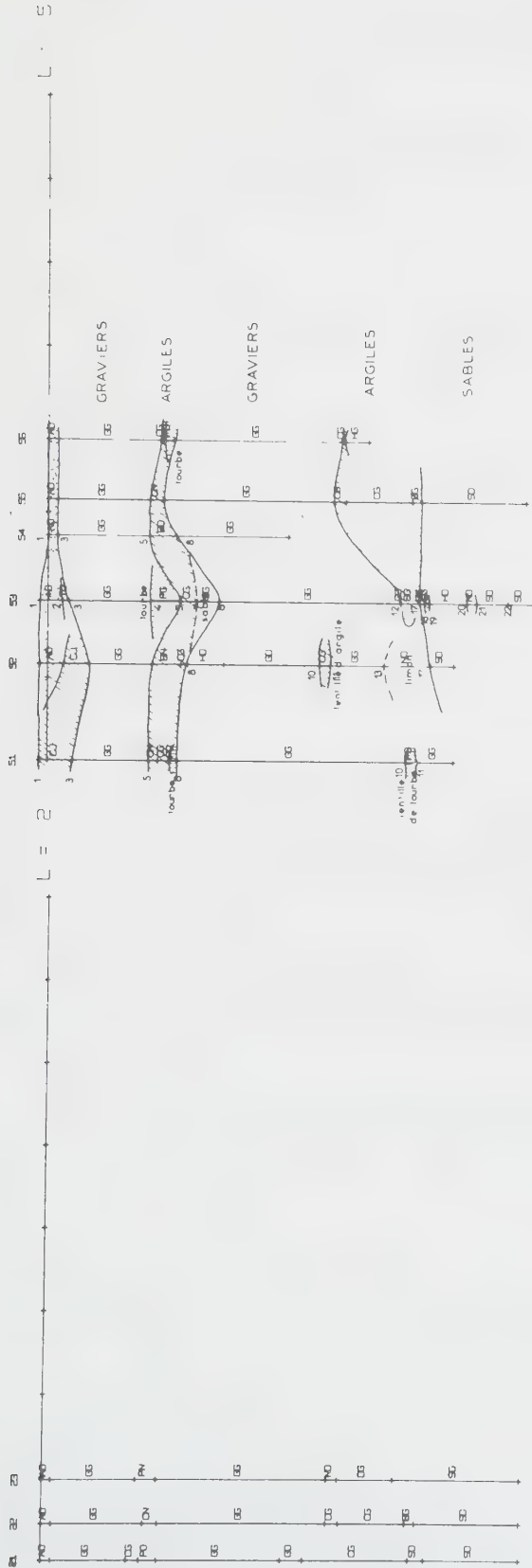


FIG. VIII-3

des sondages dans un fichier TGP qui comprend une fiche I 15 par couche et par ligne du réseau curviligne. La fiche comprend 10 mots (10 sondages possibles par ligne du réseau).

Ce fichier TGP est un fichier intermédiaire pour constituer le fichier TGPRO où on trouve dans une même fiche I5 les pentes dans chaque log du toit de la même couche dans tous les sondages.

TGPRO et PRO qui ont les mêmes numéros de fiches permettent l'étude de toute une couche.

La figure VIII.4 montre la méthode dans son ensemble. Enfin, sur les tableaux de la figure VIII.5, on trouvera résumée graphiquement la structure des 6 fichiers.

VIII.II.1.4 - Recherche des surfaces de COONS - Toit des couches

Nous n'avons pas encore programmé le calcul du toit de la couche en tout point en se basant sur les surfaces de Coons.

A l'heure actuelle, nous disposons dans la bibliothèque des programmes de l'IBM 1130 du laboratoire, d'un nouveau programme permettant ce calcul à partir simplement des renseignements de cotes.

Nous pouvons donc sortir en utilisant seulement le fichier PRO la profondeur de tout toit de couche et tracer les courbes de niveau d'un toit de couche.

Enfin, nous avons pris connaissance dernièrement d'un article de G. MATHERON, ingénieur du Corps des Mines, dans la Revue de l'Industrie Minérale d'Août 69, sur les variables régionalisées qui permettent, à partir d'un maillage quelconque d'estimer la variable en tout point.

L'utilisation des surfaces de Coons n'en est pas pour autant dépassée en ce qui concerne notre problème de cartographie. Il nous semble important de terminer la mise au point de cette méthode pour la comparer à celles qui existent déjà.

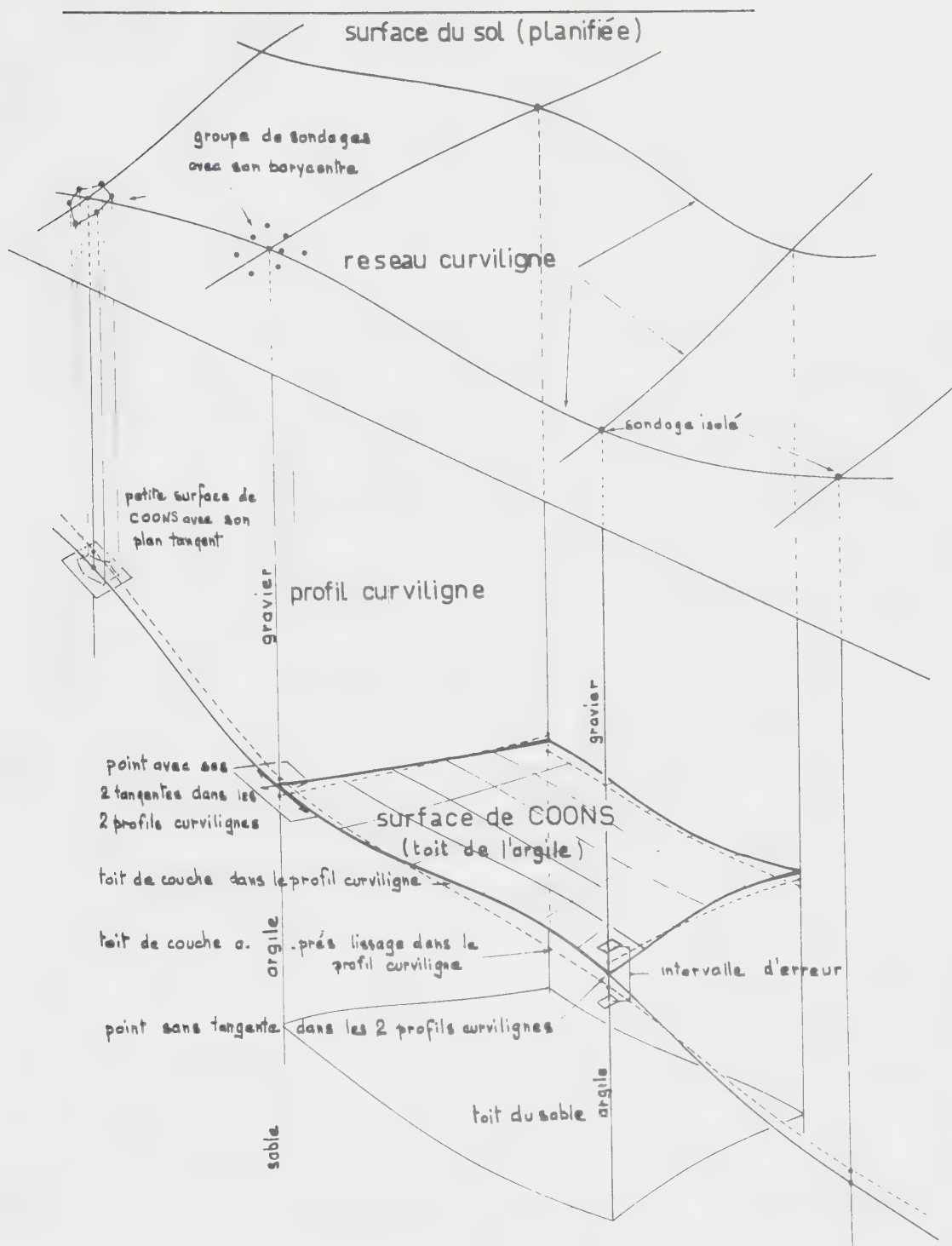


Fig. VIII-4

S0

Sondages

I fiche / sondage

250 sondages

ENTIER

I1: 1

41

250

26 mots par fiche

COTE
N1
N2
N3
N4

SUR

abscisses curvilignes des sondages sur
le réseau curviligne REEL

I fiche de 100 cases (200 mots)

I2=1



La fiche est un tableau d'indice courant : $N = K + IOL$ REEL
 K rang sur la ligne
 L numéro de ligne

TGSUR

tangentes aux noeuds du réseau

REEL

I3=1

même fichier que SUR

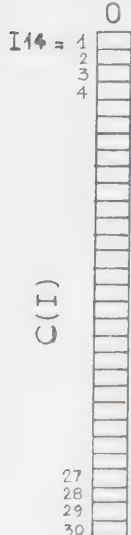
APRO

profondeur de couches de même nature

REEL

I fiche par couche dans chaque sondage - 30 couches par sondages

$$I14 = (N-1)30 + C(I)$$



COTE I14 = 361
 N1 = 363
 N2 = 365
 N3 = 368

COTE I14 = 1591
 N1 = 1593
 N2 = 1595
 N3 = 1598

2970

100 sondages numérotés suivant N

3000 fiches de 1 case (2 mots)

PRO profondeurs d'une même couche

REEL

I fiche pour la même couche dans tous les sondages

14. 4

2	Z	Z
3	N1	N1
4	N2	N2
5	N3	N3

30

30 fiches de 100 cases (200 mots)

indice courant des 100 mots par fiche : $N = K + 10.L$

TGP tangentes aux toits des couches dans les profils curvilignes

REEL

I fiche par couche et par profil

$$I15 = 10 \times L + C(I)$$

L = 0	L = 1	L = 5	L = 9
I15 = 4	I15 = 34	I15 = 454	274
	tg Z	tg Z	
	33	453	
	tg N1	tg N1	
	35	455	
	tg N2	tg N2	
	38	458	
	tg N3	tg N3	
	1 2 3	1 2 3 4	

30

300

300 fiches : 30 couches - 10 lignes
10 cases par fiche (20 mots)

TGPRO même fichier que TGP , mais classé comme PRO

15 30 fiches de 100 cases (200 mots)

REEL

VIII.II.2 - Estimation des caractéristiques et propriétés d'un sol

Ce travail n'a pas été encore entamé. La méthode de variables régionalisées de G. MATHERON, nous semble un moyen puissant pour cette recherche. Il nous faudra l'adapter si nécessaire à notre problème.

4ème PARTIE

QUELQUES TRAVAUX DEJA EXECUTES PAR D'AUTRES AUTEURS

TRAVAUX DE CHERCHEURS DE L'INSTITUT DE MECANIQUE DE GRENOBLE

CADOT Michel - Thèse de 3° cycle

Contribution à l'étude statistique du contrôle et de la sécurité
d'un barrage en terre - GRENOBLE Juillet 1961

CADOT a procédé à l'étude statistique des matériaux du barrage de
SERRE PONCON à partir de 4290 individus dont 3075 prélevés dans le
noyau étanche et 1295 dans les recharges .

4 caractères ont été étudiés :

$\alpha\%$: pourcentage d'éléments $< 5\text{mm}$ (mortier) dans le sol total

$\beta\%$: pourcentage d'éléments < 80 (limon) dans le mortier

w : teneur en eau

γ_d : poids volumique sec

L'auteur a étudié la distribution des individus suivant les 4
caractères : il en a déduit à des populations normales .

et l'influence des 3 premiers sur γ_d :

Les corrélations qu'il a trouvé sont $r(\gamma.w) = -0,42$

$$r(\gamma.\alpha) = -0,38$$

$$r(\gamma.\beta) = 0$$

Il a ensuite étudié $\bar{\alpha}, \bar{w}, \bar{\gamma}, \sigma_{\alpha}, \sigma_w, \sigma_{\gamma}, r(\gamma.w), r(\gamma.\alpha)$ pour
chaque classe de β (intervalle de 5%) . Il a obtenu :

$\gamma.\beta$ indépendants ($r = 0$)

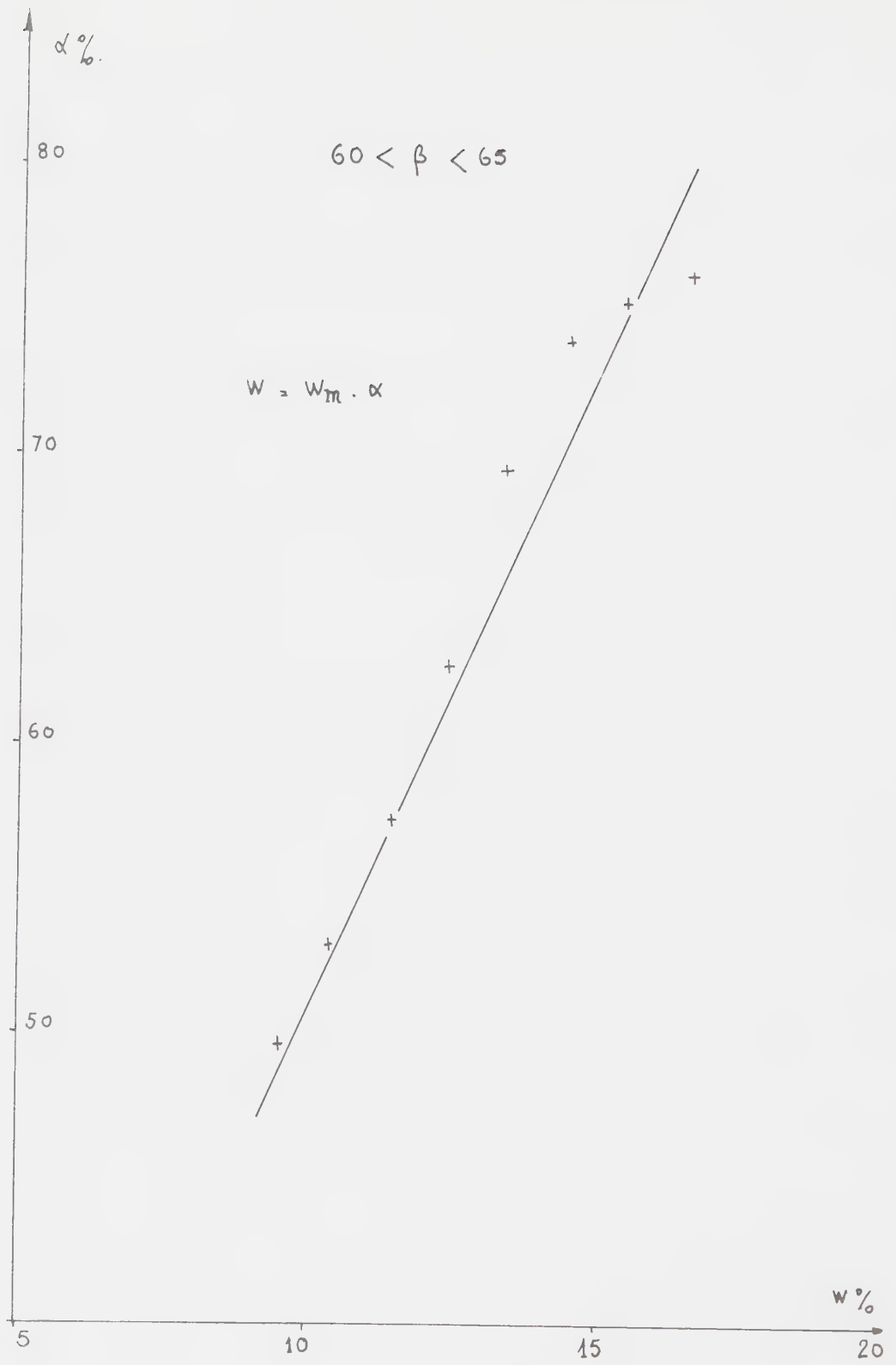
$\gamma.\alpha$ relation linéaire $\frac{\sigma_{\gamma}}{\gamma} = k \frac{\sigma_{\alpha}}{\alpha}$

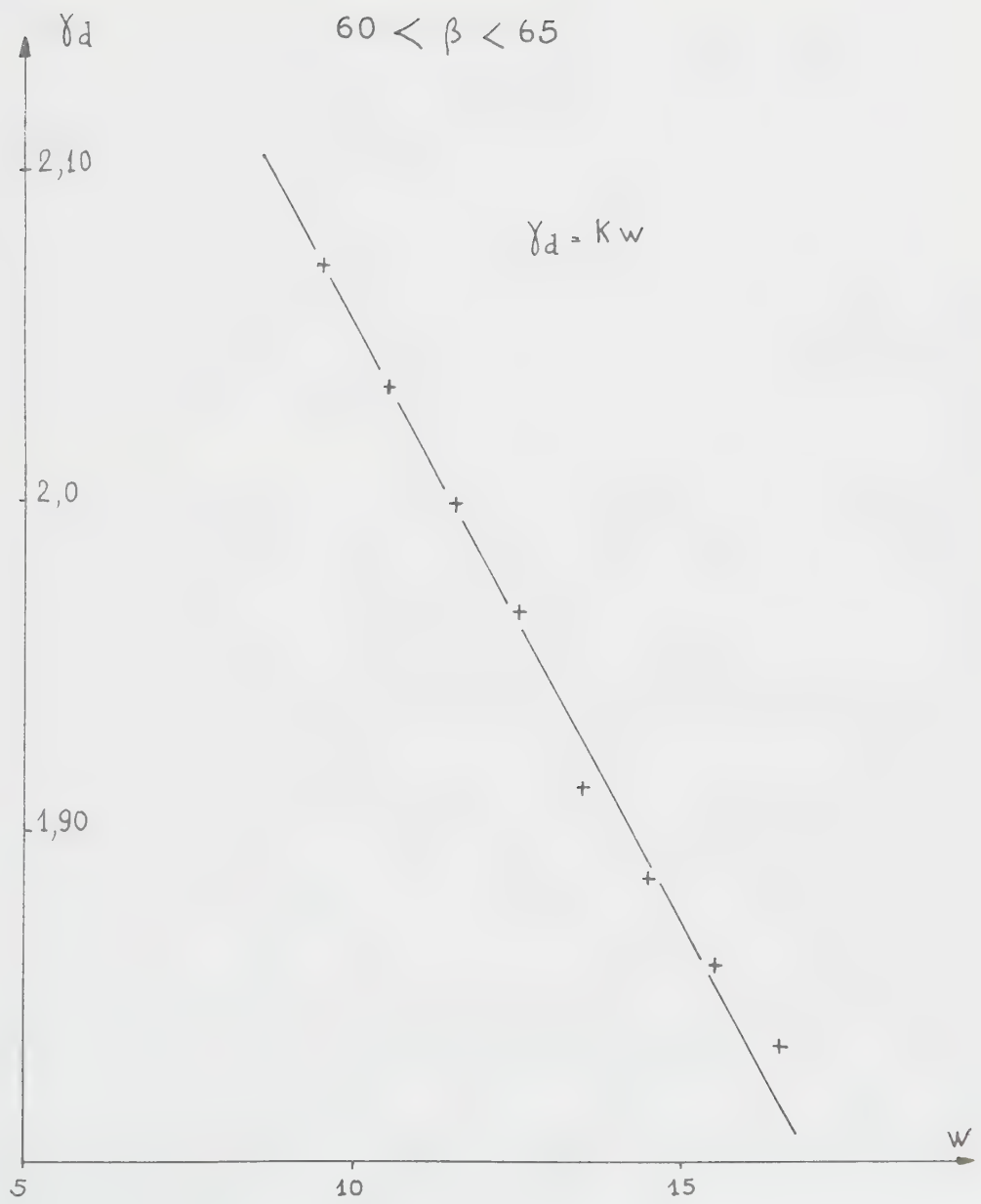
$\alpha.w$ regroupement des points ($r(\gamma.\alpha), r(\gamma.w)$) autour de la
1° bisectrice , les plus fortes valeurs correspondant aux fortes
valeurs de β . Pour les matériaux fins ($\beta\%$ élevé) on a alors :

$$\gamma = L \alpha \quad \gamma = Kw \quad \text{soit} \quad w = \frac{L}{K} \alpha$$

Dans un matériau à squelette , les gros éléments ne fixant pas
d'eau , on peut supposer que la teneur en eau w est liée à celle
du mortier w_m par : $w = w_m . \alpha$ $w_m = \frac{L}{K} = c^{te}$

Il a vérifié ces résultats sur la classe $60\% < \beta < 65\%$





CADOTa aussi défini une methode de controle en cours de construction pour d et w , en définissant les 2 courbes d'efficacité du test

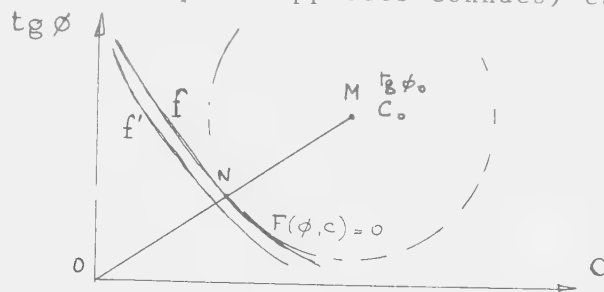
CADOT a enfin étudié l'influence de la dispersion des propriétés mécaniques sur la sécurité d'un barrage homogène :

Dans le plan ϕ, C , il définit la courbe $F(\phi, C) = 0$ représentant l'état d'équilibre, et divisant le plan en 2 zones correspondant l'une à la stabilité, l'autre à la ruine.

Il en déduit que la sécurité du barrage pourra se chiffrer par la probabilité de trouver des points ϕ et C à l'intérieur de la zone de ruine

Il utilise la "methode de GRENOBLE" (Réf. 1) qui définit 2 courbes, la plus et la moins favorable $f'(\phi, C) = 0$ et $f(\phi, C) = 0$ correspondant à tous les cercles de rupture possibles.

Le coefficient de sécurité $F = \frac{\text{tg } \phi_0}{\text{tg } \phi} = \frac{C_0}{C}$ (ϕ_0 et C_0 étant les caractéristiques mécaniques supposées connues) est alors égal à $\frac{OM}{ON}$



influence de la dispersion sur la sécurité

CADOT suppose ϕ et C distribués normalement et indépendants.

$$\phi(\phi_0, \sigma_\phi) \quad C(C_0, \sigma_C)$$

il peut donc calculer $P_C(C < C^*)$ et $P_\phi(\phi < \phi^*)$

$$P\{(\phi < \phi^*) \cdot (C < C^*)\} = P_C \cdot P_\phi$$

à chaque point C, ϕ de $F(\phi, C) = 0$ on peut donc affecter P

La valeur la plus forte correspondra à ce que LEVI (Réf. 2) appelle la probabilité de rupture de l'ouvrage.

Nous ferons 2 remarques sur le travail de CADOT :

1°- Il a appliqué ce que nous avons appelé la théorie du "maillon le plus faible" alors qu'il s'agirait de celle des "effets successifs"

2°- Le point le plus défavorable n'est pas l'intersection N de $F(\phi, C) = 0$ avec OM . C'est le point de tangence du cercle de concen

tration ($\rho = 0$) et de $F(\phi, C) = 0$

Si $\rho \neq 0$ le cercle devient une ellipse ; la probabilité totale est alors :

$$P(AB/H) = P(A/H) \cdot P(B/AH)$$

nous savons calculer B/AH en fonction de ρ pour des distributions normales .

Références :

- J. BIAREZ , Remarques sur la stabilité des talus - Influence de la loi de répartition des contraintes . Archiwum Hydrotechniki, POLOGNE, 1960
 R. LEVI , Exposé devant le comité de Mécanique des Sols et des Travaux de Fondations , PARIS , Juin 1957
 J. BONITZER , Application des techniques statistiques aux contrôles des fabrications des matériaux enrobés . Revue générale des routes et aéroports , Décembre 1959 .
 M. PROT Essais statistiques sur les mortiers et bétons , Annales I.T.B.T.P. , Juillet 1949 .

TRAN-VO-NHIEM 2° thèse de Docteur Ingénieur

Etude d'un appareil portable destiné à la reconnaissance du sol en place : le pénévane , GRENOBLE , Février 1971

Le but de l'auteur était la reconnaissance rapide du sol en place à l'aide du Pénévane qui est un pénétromètre dynamique léger combiné à un vane-test robuste (scissomètre)

Il a étalonné son appareil sur 250 échantillons de sol au point de vue de la mesure des caractéristiques mécaniques du sol en place .

Les variables étudiées ont été , d'une part :

- N nombre de coups par 15 cm d'enfoncement de la tête de pénétration

- $\tau_{\max}$ contrainte de cisaillement du sol en place correspondant au maximum de la courbe de cisaillement scissométrique

, et d'autre part :

$$- \gamma_d , w , \phi_U^M , C_U^M$$

TRAN-VO-NHIEM a étudié des corrélations à 2 variables dont les résultats sont donnés dans le " Tableau 3 "

$$\text{où } q_s = 2C \left(\tan \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

$$\tau_z = C_U + K_o \cdot \gamma \cdot z \cdot \tan \phi_U \quad \text{avec } K_o = 1 \text{ t/m}^2$$

$\tau_\phi = \gamma \cdot z \cdot b_{\phi v} + C_U \cdot b'_{\phi v}$ composante $\tan \phi$ de la contrainte de butée d'inclinaison $\delta_1 = +\phi$ sur une paroi verticale .

TABLEAU 3

VALEURS DU COEFFICIENT DE CORRELATION LINEAIRE r ENTRE DEUX VARIABLES

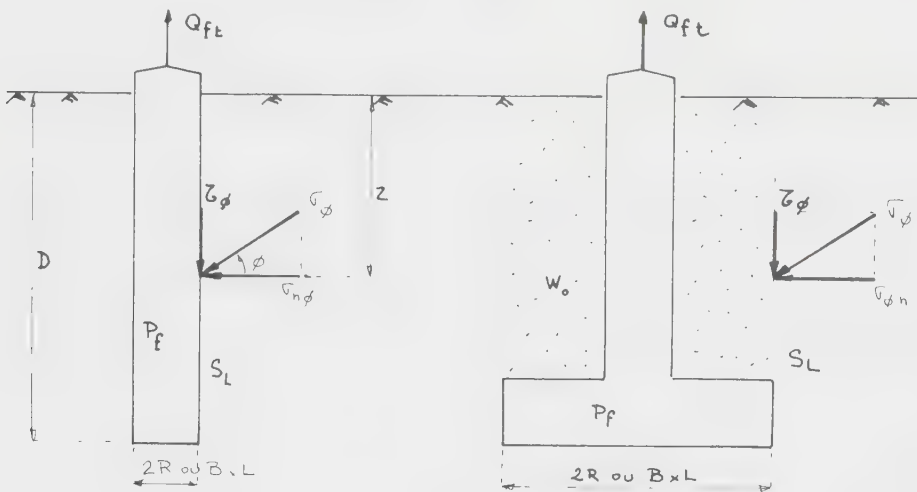
CORRELATION LINEAIRE ENTRE	VALEURS DE r POUR LA POPULATION	
	DES ARGILES ET CRAIES ($n = 152$)	DES SABLES ($n = 33$)
N et $T_{\max}$ Log N et Log $T_{\max}$	0,8837 0,8994	0,9212 0,8960
C_u et N Log C_u et Log N	0,6761 0,8112	0,3590 0,2167
C_u et $T_{\max}$ Log C_u et Log $T_{\max}$	0,7006 0,8143	0,4266 0,3228
$\emptyset$ et N Log $\emptyset$ et Log N	0,170 0,260	- -
q_s et N Log q_s et Log N	0,6771 0,8262	0,5251 0,4225
q_s et $T_{\max}$ Log q_s et Log $T_{\max}$	0,7150 0,8222	0,5778 0,5015
T_z et N Log T_z et Log N	0,7164 0,8313	0,6886 0,6090
T_z et $T_{\max}$ Log T_z et Log $T_{\max}$	0,7348 0,7653	0,7244 0,8162
$T_{\emptyset}$ et N Log $T_{\emptyset}$ et Log N	0,6933 0,8108	0,5187 0,4354
$T_{\emptyset}$ et $T_{\max}$ Log $T_{\emptyset}$ et Log $T_{\max}$	0,6964 0,8082	0,5669 0,4162

Il a proposé des estimations linéaires d'une variable (ou de son log) en fonction d'une ou deux variables (ou de leur log)

L'estimation de τ_ϕ permet à NHIEM d'estimer la force d'arrachement limite des fondations de pylones .

Il détermine le diagramme de τ_ϕ sur toute la profondeur D , en utilisant les corrélations de τ_ϕ par rapport à N ou $\tau_{\max}$ ou encore N et $\tau_{\max}$

Il propose comme valeur approchée de Q_{ft} = force d'arrachement limite :

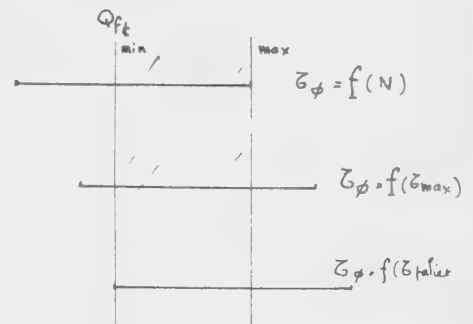


$$Q_{ft} = S_L \cdot \left[\text{Aire du diagramme de } \tau_\phi \text{ de } 0 \text{ à } D \right] + P_f + W_o$$

Les comparaisons entre cette valeur théorique Q_{ft} calculée et la valeur de Q_{ft} expérimentale obtenue par EDF sur 80 essais d'arrachements de fondations en vrai grandeur doit faire l'objet d'une publication ultérieure (Réf. 2) :

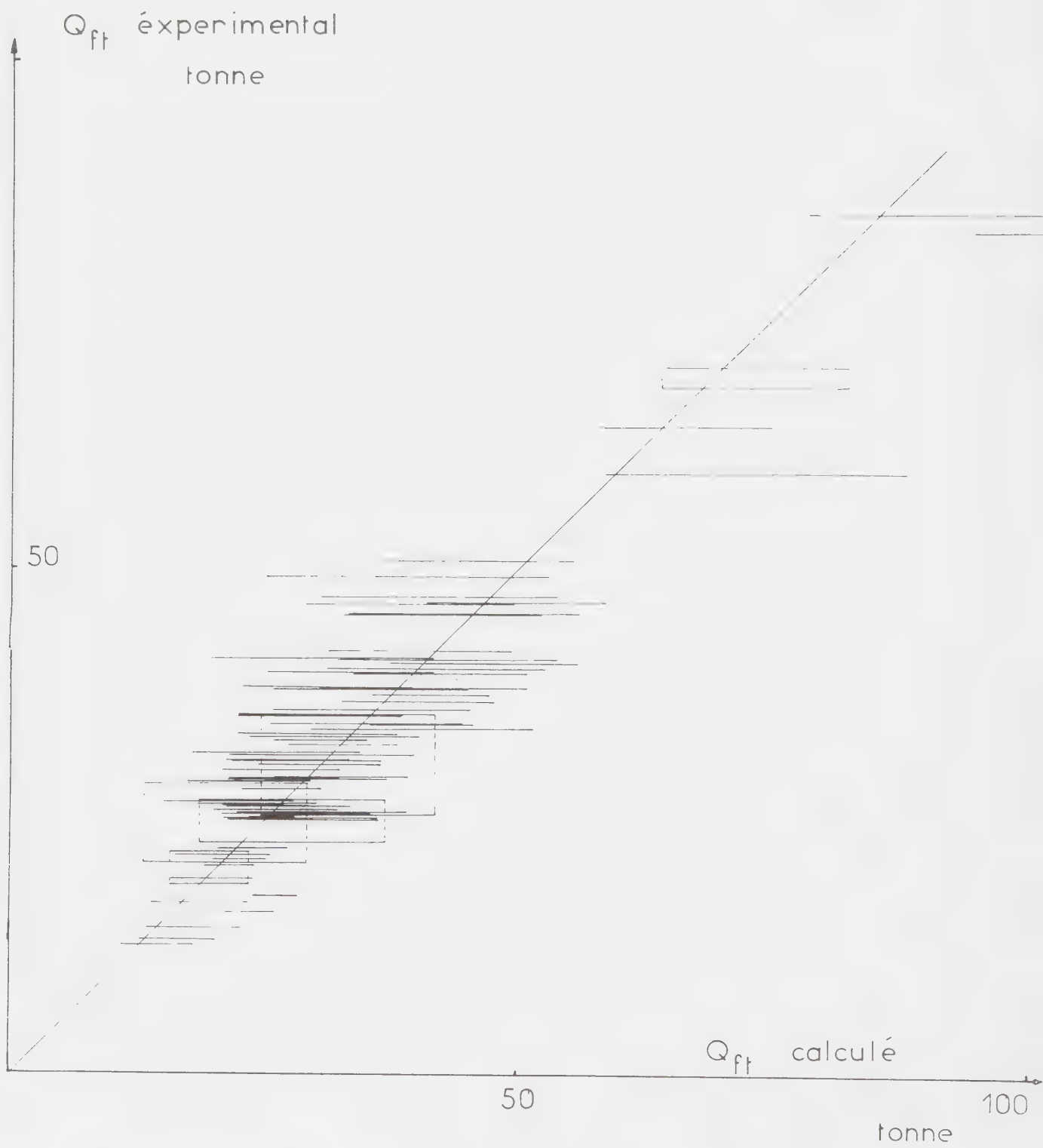
NHIEM a adopté comme intervalle de probabilité pour Q_{ft} la plage commune aux 3 intervalles que l'on obtient en calculant τ_ϕ à partir de :

$$\begin{aligned} \bar{N} \pm 3\sigma_N \\ \tau_{\max} \pm 3\sigma_{\tau_{\max}} \\ \tau_{\text{palier}} \pm 3\sigma_{\tau_{\text{palier}}} \end{aligned}$$



et constaté que les valeurs expérimentales de Q_{ft} se trouvent bien dans cet intervalle

Le graphique ci-après reproduit ces résultats .



Références

TRAN-VO-NHIEM , Reconnaissance rapide du sol en place à l'aide du pénévane . Application au calcul direct de la force portante et de la résistance à l'arrachement des fondations , Archiwum Hydrotechniki , POLOGNE , 1972 .

D. MARTIN , Y. PORCHERON , TRAN-VO-NHIEM , le calcul des fondations de pylones à l'aide de l'appareil de chantier Pénévane , CIGRE , PARIS Août 1972 .

J. BIAREZ - Généralités sur les propriétés mécaniques des sols. Nouveaux appareils de mesures petites diges sur vases. Communication présentée au Comité technique de la Société Hydrotechnique de France - 22 mars 68.

Nous avons fait mention de cette communication et présenté ses résultats. Nous donnerons seulement ici le tableau des valeurs des moyennes et écarts type obtenus pour différents échantillons par l'auteur. page 210

J. ANQUETIL et B. CAMBOU. Recherches de corrélations optimum proctor - caractéristiques du sol. Ecole centrale lyonnaise. Projet de fin d'études mai 1969.

Nous avons parlé de ces travaux dans le chapitre 2.

Au cours de leur DEA à l'IMG , ces 2 chercheurs ont complété leurs travaux. Ils ont proposé des corrélations pour obtenir les caractéristiques proctor à partir des caractéristiques du matériau.

Voici leurs résultats :

1°) Corrélation de la forme $X = AY + BZ + C$ avec $X = \gamma_d$

Les variables Y et Z sont W_L , W_P , $\% < 2 \text{ mm}$, $\% < 0,4 \text{ mm}$, F , $\frac{\Sigma}{n}$

a) $Y = W_L$, $Z = W_P$, $n = 277$

$$\gamma_d = - (0,6854 W_L + 1,166 W_P) 10^{-2} + 2,31$$

$$p = 0,72$$

b) $Y = W_L$, $Z = \% < 2 \text{ mm}$, $n = 124$

$$\gamma_d = - [0,87 W_L + 0,41 (\% < 2 \text{ mm})] 10^{-2} + 2,49$$

$$p = 0,85$$

Vases » Tableau des moyennes par lieu

LIEUX	γ_c	γ_d	w (%)	w_L (%)	w_P (%)	IP (%)	I_c	S (%)	R_c	c	q_c	c_u	q_u	σ_c	C_c	$E_{0,1/10,5}$	$E_{0,5/1}$	$E_{1/2}$	$E_{2/4}$	E_4
FRANCE 1 :																				
$\bar{x}$	2,61	0,73	116					93,4	0,36 0,24	0,10						20,1	38,9	53,96	85,96	131,02
s		0,24	62,3					2,3	8							16,63	32,42	31,89	54,31	65,21
n		11	14					9								9	9	9	9	9
ASIE 1 :																				
$\bar{x}$	2,53	0,71	113,0	100	31,3	68,7			0,26	0,14				0,37	1,56	6,54	6,21	6,21	14,6	
s	0,13	0,19	42,1						0,13	0,03				0,16	0,27	4,80	2,77	0,74	0,1	
n	4	8	8						3	4				2	2	2	2	2	2	
FRANCE 3 :																				
$\bar{x}$		0,92	70,9											0,91	0,77					
s		0,07	8,1											0,20	0,21					
n		10	10											6	6					
FRANCE 2 bis :																				
$\bar{x}$	2,71	0,99	64,7	70,4	26,8	43,6			0,49	0,16						10,35	12,52	15,8	29,9	57,1
s		0,10	9,6	3,0	0,5				0,15	0,07						6,05	2,6	2,7	5,8	11,4
n		10	10	2	2				6	6						2	2	2	2	2
FRANCE 5 :																				
$\bar{x}$		0,98	63,4	132,4	44,1	88,3			0,6											
s		0,22	24																	
n		5	5																	
FRANCE 2 :																				
$\bar{x}$	2,67	1,09	45,0													10,35	12,52	15,8	29,9	57,1
s		0,05	11,3													6,05	2,6	2,7	5,8	11,4
n		2	3													2	2	2	2	2
FRANCE 4 :																				
$\bar{x}$		1,15	43,5	58,6	23,8	34,8			0,6											
s			4,5																	
n			2																	
FRANCE 1 bis :																				
$\bar{x}$	2,75	1,36	37,1	39,0	22,4	16,6		96,1	0,48	0,145	33		0	1,0	0,21	10,42	17,98	32,08	52,28	93,46
s	0,01	0,16	7,8	7,2	1,6				0,14	0,053	1,4				0,08	3,18	1,45	5,51	8,70	12,33
n	6	85	85	25	25			73	24	39	2				8	6	6	6	6	6
AFRIQUE 1 :																				
$\bar{x}$	2,75	1,37	36,1	39,0	22,4	16,6			0,48	0,145	33		0	1,0	0,21					
s	0,01	0,16	7,8	7,2	1,6				0,14	0,053	1,4				0,08					
n	6	85	85	25	25				24	39	2				8					
AFRIQUE 2 :																				
$\bar{x}$		1,43	33,0						0,53											
s		0,04	3,2						0,21											
n		36	36						19											

 $\bar{x}$ représente la moyenne du paramètre considéré; s représente l'écart-type du paramètre considéré; n représente le nombre de valeurs à partir duquel la moyenne a été calculée.

$$c) \quad Y = W_L \quad Z = \% < 0,4 \text{ mm} \quad n = 245$$

$$\gamma_d = - \left[0,93 W_L + 0,36 (\% < 0,4 \text{ mm}) \right] 10^{-2} + 2,4$$

$$p = 0,83$$

2°) Corrélation de la forme $X = AY^\alpha \cdot Z^\beta + B$ $X = \gamma_d$

$$a) \quad Y = W_L \quad Z = \% < 2 \text{ mm}$$

$$\gamma_d = -0,0149 W_L^{0,4897} (\% < 2 \text{ mm})^{0,4623} + 2,5$$

$$\gamma_d \approx -0,015 \sqrt{W_L (\% < 2 \text{ mm})} + 2,5$$

$$p = 0,88$$

$$b) \quad Y = W_L \quad Z = \% < 0,4 \text{ mm}$$

$$\gamma_d = 0,030 W_L^{0,501} (\% < 0,4 \text{ mm})^{0,3121} + 2,5$$

$$\gamma_d \approx -0,03 \sqrt{W_L} \cdot \sqrt[3]{0,4} + 2,5$$

$$p = 0,90$$

$$c) \quad Y = W_L, \quad Z = F$$

$$\gamma_d = -0,0507 \sqrt{W_L} \sqrt{F} + 2,5$$

$$p = 0,87$$

$$d) \quad Y = W_L \quad Z = \frac{\Sigma}{n}$$

$$\gamma_d = -0,0058 W_L^{0,48} \frac{\Sigma}{n}^{0,5} + 2,5$$

$$\gamma_d \approx -0,006 \sqrt{W_L \cdot \frac{\Sigma}{n}} + 2,5$$

$$p = 0,89$$

Les auteurs ont essayé des corrélations en prenant pour Y le groupement $0,685W_L + 1,166 W_P$ trouvé au (1° a)).

$$a) \quad Z = \% < 0,4$$

$$\gamma_d = 0,0157 Y^{0,6244} Z^{0,3145} + 2,5$$

$$p = 0,88$$

$$b) \quad Z = F$$

$$\gamma_d = -0,028 Y^{0,59} F^{0,22} + 2,5$$

Ils ont conclu de ces résultats que la meilleure connaissance de γ_d est donnée la formule

$$\gamma_d \simeq 0,03 W_L^{1/2} (\% < 0,4)^{1/3} + 2,5$$

$$p = 0,9$$

3°) Corrélation de la même forme qu'en 2° avec $X = W_{OPN}$

$$a) \quad Y = W_L \quad Z = \% < 0,4 \text{ mm}$$

$$W_{OPN} \simeq 4,5 + 0,015 W_L (\% < 0,4)^{2/3}$$

$$b) \quad Y = W_L \quad Z = F$$

$$W_{OPN} \simeq 4,5 + 0,057 W_L \cdot F^{1/3}$$

Il en ressort que le groupement $G = W_L^3 \cdot (\% < 0,4)^2$ est le plus significatif

$$\begin{array}{l} \gamma_d \simeq 0,03 G^{1/6} + 2,5 \\ W_{OPN} \simeq 0,015 G^{1/3} + 4,5 \end{array}$$

Références

- George N. RUND , John R. SALLBERG , Webster H. COLLIN-

"Corrélation of compaction and classification test Da of Soils"
public Roads vol. 32 n° 4 octobre 1962

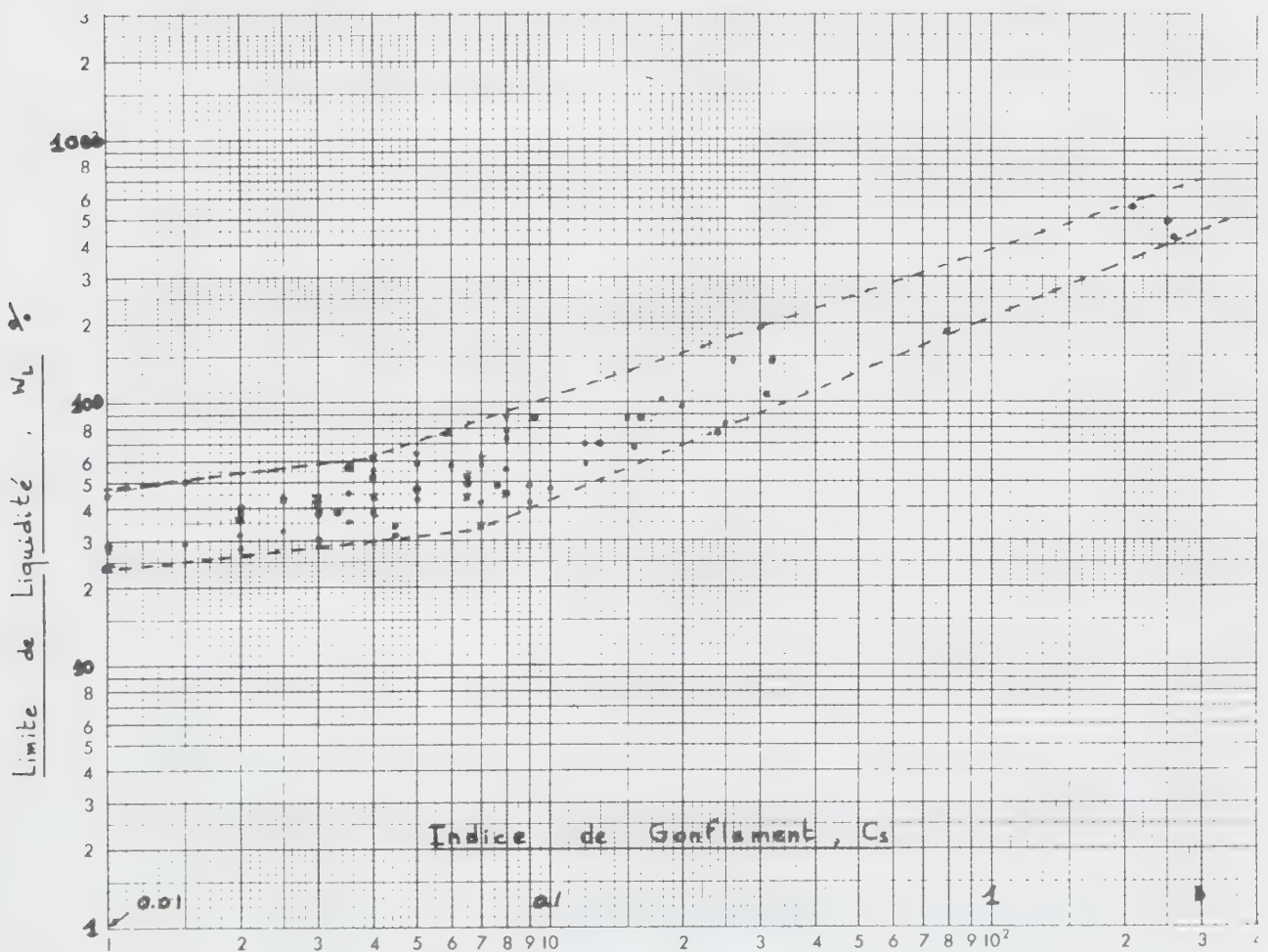
- C. SHON "Les possibilité d'emploi de corrélations statistiques dans le contrôle du compactage des sols" non publié.

- J. BERTHIER C. SHON J.C. GRESSEN "Le contrôle du compactage des remblais"
juin 1964 non publié.

- E.G. YEMMINGTON "Corrélations of compaction Test Results with plasticity
characteristics of Soils. Bureau of Public Roads 1958

J.M. RUNACHER 1^o thèse de docteur de l'université
La structure des argiles. Application à l'étude de leurs propriétés masco-
scopiques. GRENOBLE - Février 1970

Dans cette thèse l'auteur a étudié le gonflement et trouvé pour des argiles
venant de toutes les parties du monde une corrélation certaine entre $\log C_s$ indice
de gonflement et $\log W_L$. voir figure 6.2.



Corrélation Limite de Liquidité - Indice de Gonflement. Diagramme log-log.

Figure 6-2

Groupe d'hydrologie de surface de l'IMG (BOUVARD. BOIS. OBLED. DE BREUQUE)

Nous donnons ici seulement la méthode statistique utilisée par ces chercheurs.

1) Corrélation multiple avec élimination, ou introduction - élimination pas à pas, des variables explicatives.

Ces 2 méthodes correspondent aux programmes "Remulos" et stepwise linear regression. Cette méthode est couramment utilisée pour la plupart de leurs problèmes,

- Explication et prévision de fonte des neiges
- Prévision de crues dans le bassin du Niger

Cette méthode nécessite d'avoir quelques éléments sur l'explication et la forme des lois d'interaction. Elle peut exiger au besoin l'étude des corrélations partielles. Moyennant cela elle donne des résultats rapides et toujours fort intéressants.

2) Méthodes d'analyse factorielle (essentiellement la méthode des composantes principales.

La méthode consiste à trouver un transformateur rendant les variables étudiées indépendantes.

Le groupe commence à l'utiliser dans les cas suivants

- Grand nombre de variables explicatives corrélées = recherche de l'élimination de l'instabilité des coefficients de regression.
- Réduction des variables = mise en fichier moins encombrants.

3) Ajustement de lois à des phénomènes

Les lois qu'ils utilisent en hydrologie sont les suivantes :

- loi de Gauss
- loi de Gibrat Gauss (loi normale des logarithmes)
- loi de Pearson III ou Gamma incomplète
- loi de Grunbel (double exponentielle)

4) Contrôle des séries chronologiques

Il s'agit de déceler des erreurs dans les longues séries d'observation (séries de données de pluies, de débits ...) le groupe est parti de la méthode fondée sur l'analyse des cumuls des résidus de corrélation entre stations. La méthode est à la fois graphique et statistique.

5) Prévision des déclenchements d'avalanches

La méthode prévisionnelle est en cours délaboration.

Elle est basée sur la méthode dite des "PROBITS"

J.L. FAVRE Rapport intérieur à la CNR sur l'aménagement de la chute de Vallabregues. Lyon sept. 1967

L'étude a porté sur des échantillons intacts dans les matériaux devant servir à la construction des digues et sur des échantillons compactés au Proctor normal.

L'étude des échantillons intacts a donné peu de résultats (distribution de W_{sat} , W , corrélations $W_L \sim F$, $W_L - W$)

Par contre l'étude sur les échantillons compacts faites sur 3 classes différentes : $W_L < 20$, $20 < W_L < 30$, $W_L > 30$ a donné une relation linéaire entre

ϕ_{dOPN} et W_{OPN} . Les 3 droites se coupent au point $\phi_d = 1,79$ - $w = 14\%$

L'étude a été complétée par une recherche sur la limite de retrait W_s . Elle a conduit à l'existence des relations :

$$\left. \begin{array}{l} f_1 (W_{OPN}, W_s, W_L) = 0 \\ f_2 (W_{OPN}, W_s, \phi_d) = 0 \\ f_1 (W_{OPN}, W_s, W_L) = 0 \\ f_3 (W_{OPN}, W_s, C_c) = 0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} g_2 (\phi_d, W_L) = 0 \\ g_1 (\phi_d, C_c) = 0 \\ g_3 (C_c, W_L) = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \text{voir planche III-1} \end{array}$$

Les caractéristiques mécaniques sont celles du matériau compact.

G. BIGUENET, M. DAYRE, J.L. FAVRE. Essai de cartographie géotechnique de Grenoble et ses environs, Premier congrès International de Géologie de l'ingénieur, PARIS, sept. 1970

Nous renvoyons le lecteur au 8ème chapitre de cette thèse.

Vallabrègues - Etude des limons

III.1)

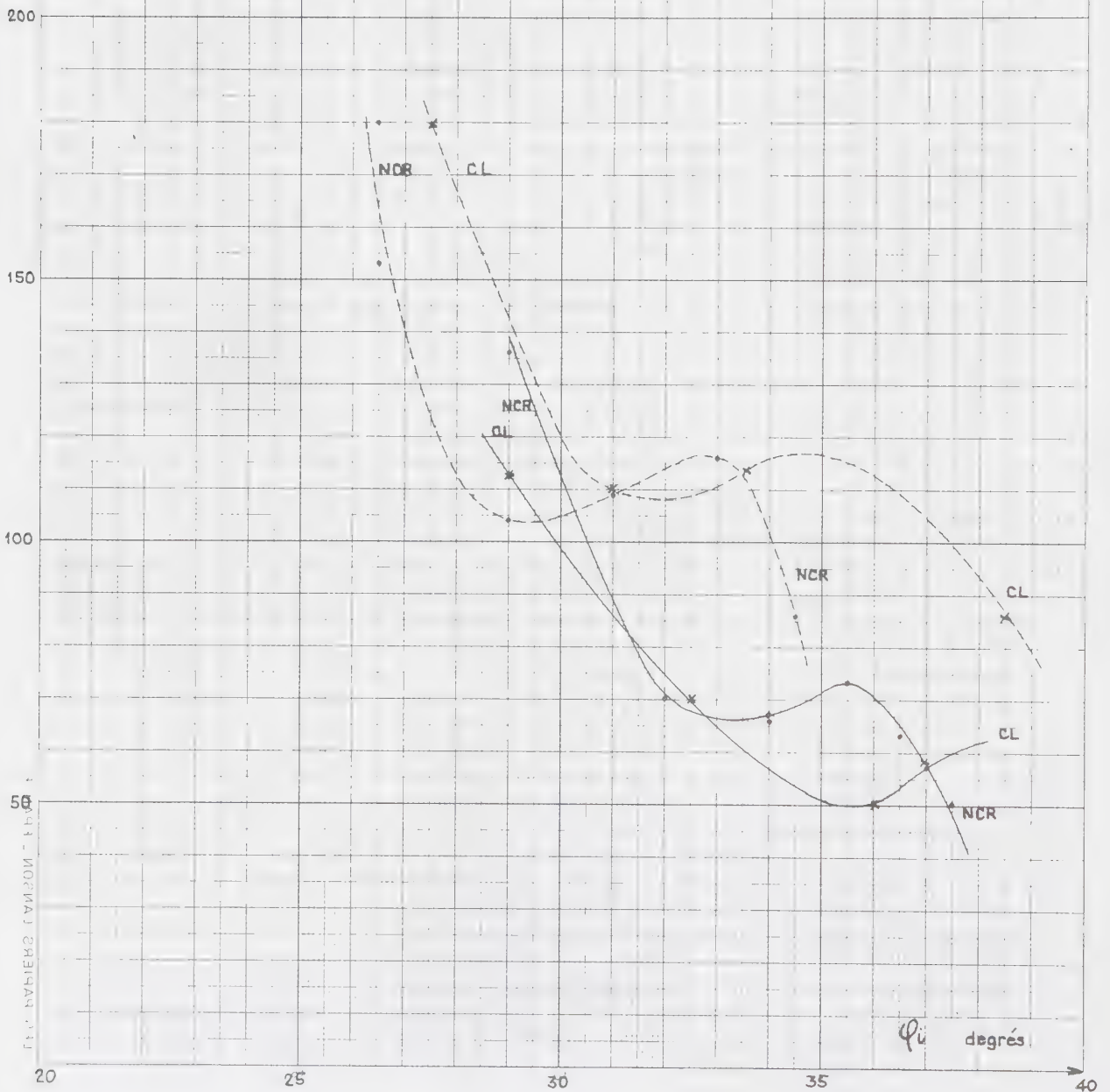
Proctor normal

10/25 Proctor normal

Cc kgf/cm²

Mise en eau au début de l'essai

4 2 0 Kg



A. BOTTERO , "Etude des propriétés mécaniques des matériaux argileux, en fonction de leurs propriétés physico-chimiques", Thèse de Spécialité, Grenoble, Février 1971.

L'auteur a étudié sur 400 échantillons d'argiles un grand nombre de corrélations.

Les paramètres étudiés ont été d'une part :

- $\% < 2 \mu$, composition minéralogique (%), W_L W_P W_S I_L I_P I_S A , c.e.c. (capacité d'échange de cation),

d'autre part :

- ϕ' , ϕ_e (angle de frottement vrai" d'après HVORSLEV), ϕ_d , ϕ^{PP} , C , R_C , St .

- C_c , C_g (indice de gonflement), P_s (potentiel de gonflement)

- S_L (% de retrait linéaire), S_v (% de retrait volumétrique)

Il a étudié 23 corrélations :

Propriétés physico-chimiques

$W_L - \% < 2 \mu$ $W_P - \% < 2 \mu$ $W_S - \% < 2 \mu$

$A - \% < 2 \mu$

Résistance mécanique au cisaillement

$\phi - \% < 2 \mu$ $\phi - W_L$ $\phi - I_P$ $\phi - A$

$q_s - \% < 2 \mu$ $q_s - W_L$ $S_t - I_L$

Compressibilité - gonflement

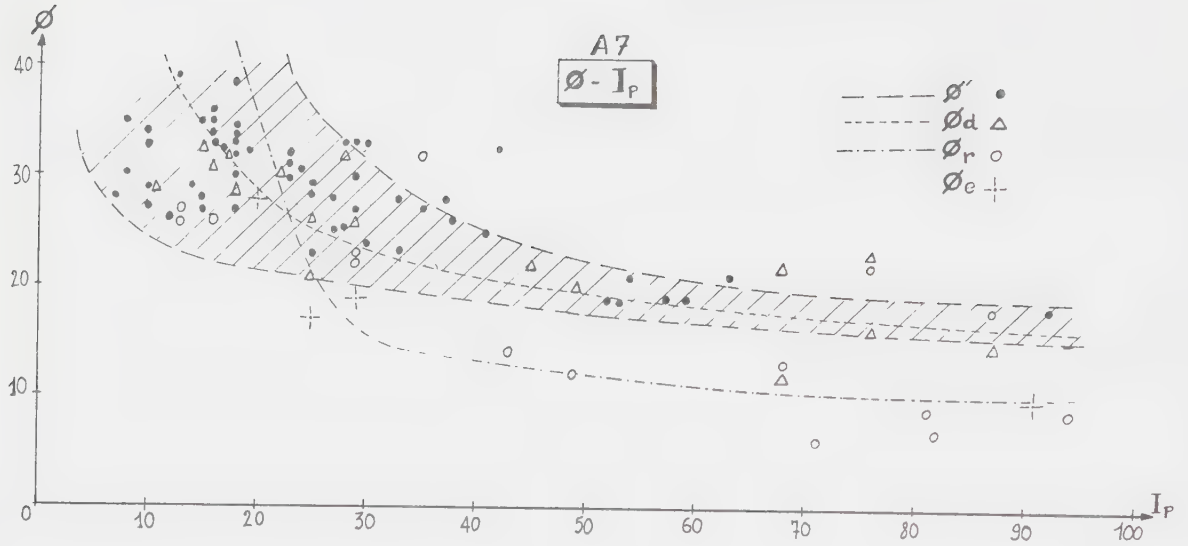
$C_c - \% < 2 \mu$ $C_c - W_L$ $C_c - I_P$ $C_c - A$

$C_g - W_L$ $C_g - I_P$

$P_s - W_L$ $P_s - I_P$ $P_s - W_S$ $P_s - A$

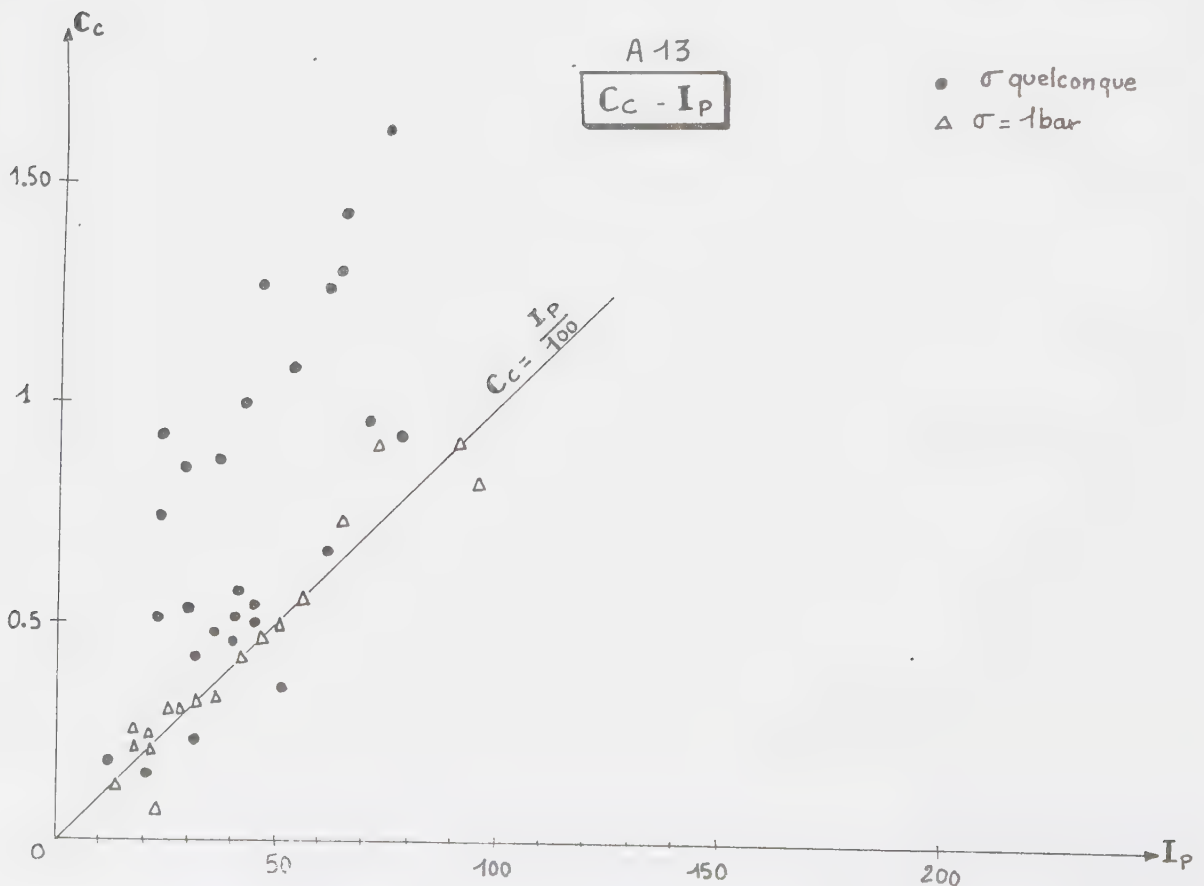
$S_L - W_S$ $S_L - I_P$ $S_L - A$

Voici 2 des nuages les plus significatifs avec les commentaires de l'auteur.



$\phi - I_p$

L'ensemble des points obtenus montre une décroissance assez nette de ϕ' suivant l'augmentation de I_p . Cette tendance était prévisible d'après les diagrammes ($\phi - W_L$) ; le paramètre I_p , semble cependant mieux la caractériser surtout en ce qui concerne ϕ_e pour lequel on peut tracer aisément la courbe $\phi_e - I_p$.



$C_c - I_p$

On notera l'excellent alignement des points obtenus pour $\sigma = 1 \text{ bar}$: suivant les échelles choisies on a la relation $C_c = \frac{I_p}{100}$, les autres points très dispersés doivent provenir d'essais très hétérogènes.

QUELQUES TRAVAUX EXECUTES HORS DE L'INSTITUT de MECANIQUE de GRENOBLE

Encore une fois, le lecteur voudra bien nous excuser de ne faire mention que de si peu d'auteurs.

Nous nous sommes heurtés à des difficultés de Bibliographie dûes au fait que de nombreuses études statistiques sont incluses dans des travaux particuliers, qu'il n'existe pas de répertoire spécifique à l'emploi des probabilités statistiques en Mécanique des sols et que cet emploi couvre tous les problèmes de Mécanique des sols.

Voici suivant les 4 directions de recherches indiquées au 2e chapitre, quelques exemples de travaux :

- Distribution suivant un caractère - Populations -

Nous n'avons pas trouvé d'études spécifiques de distribution suivant un caractère. Ces études sont incluses dans des autres problèmes, corrélation, facteur de sécurité, contrôle de compactage.

Citons seulement quelques études de classification des sols :

- H.W. CHRYSSAFOPOULOS "Identification of young tills and study of some of their engineering properties in greater Chicago area". Ph. D. Thesis (Univ. of Illinois) 1964.
- P. LUMB "The variability of Natural soils". Canadian Geotechnical Journal V. III N. 2, May 1966.
- T.K. LIU "An engineering study of Humic - Gley Soils in Illinois". Ph. D. Thesis (Univ. of Illinois) 1961
- R.K. MORSE "Engineering properties of the surficial soils of Livingston County, Illinois". Ph. D. Thesis (Univ. of Illinois) 1961 ,

- Etude du matériau "sol" - Correlations -

Voici une liste, établie au laboratoire, de quelques correlations entre paramètres d'état ou de nature et caractéristiques mécaniques que l'on peut trouver dans la littérature. La plupart sont quantitatives, sans que soit indiqué le coefficient de correlation.

Références

- RE.GRIM "Applied clay mineralogy" Mc Graw Hill - New-York 1962 (GRIM).
- GA. LEONARDS "Foundation engineering" Mc Graw Hill - New-York 1962 (LEO.).
- A. CAQUOT et J. KERISEL "Traité de mécanique des sols" 3 éd. Gauthier Villars Paris 1956 (C.K.).
- R.F. SCOTT "Principles of soils mechanics" Addison Wesley Palo Alto 1963 (SCOTT).
- K. TERZAGHI et R.B. PECK "Mécanique des sols appliquée aux travaux publics et au bâtiment" Dunod Paris 1957 (T.P.).
- J. BIAREZ "Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols et des matériaux pulvérulents". Th. de Doctorat es Sciences. Grenoble 1961 (BIA.).
- TSCHEBOTARIOFF "soils mechanics , foundations and earth structures , and introduction to the theory and practice of design and construction" Mc Graw Hill . New-York 1951 (TSCHE.)
- Proceedings of the 2^d international conference on soils mechanics and foundations engineering Rotterdam Juin 1948 volume I (PRI.)
- proceedings of the 3^d international conference on soils mechanics and foundations engineering Zurich Aout 1953 volume 1 (PZI.)
- Proceedings of the 5^d international conference on soils mechanics and foundations engineering Paris Juillet 1961 volume 1 (PPI.)
- EARTH MANUEL - United states department of the interior - Bureau of Reclamation 1th edition revised Denver 1963 (EM.)
- Soils mechanics for road engineers - Department of scientific and industrial research road laboratory Londres 1961 (SMRE)

1° - Composition chimique

GRIM	p.	233	Echange cation	C	argiles
LEO.		101	Concentration sel	Cu	argiles
C. K.		128	Cations absorbés	E	argiles
PPI.		263-267	Electrolytes	pptés mécaniques	argiles
PRI.		27	Ions échangés	Proctor	
GRIM			% Montmorillonite	atterberg	
SCOTT			"	atterberg	argiles

2° - Atterberg

GRIM	p.	232	I _L	C	argiles
GRIM		235	I _P	Ø	argiles
T.P.		68	W _L	C _c	
LEO.		79	I _L	R _c	
C.K.		269-271	W _L	C _d	
C.K.		279-280	I _P	Cu/Pc	
LEO.		210	I _P	Cu	
LEO.		215	Atterberg	Ø	
PPI.		51	W _L	C _c	
PRI.		186	Atterberg	Cu	
TSCHE.		336	Consistance	Cu	argiles
PPI.		419-421	Atterberg		

3° - Granulométrie

GRIM	p.	229	W et composition	R _c	argiles
GRIM		231	Composition et activité	C	argiles
GRIM		234	Activité	C et Ø	argiles
T.P.		84	Granulométrie forme des grains	Ø	sable
EM.		51	Sable + % gravier	Ø	sable
PPI.		143-150	% sable, % argile	C et Ø	
T.P.		90	argile	Ø	
[C.K. LEFLAIVE		233	Frottement et arrangement des grains	Ø	
PRI.		153	% argile	Atterberg	
PZI.		57-61	Activité	Atterberg	argiles
LEO.		218	Granulométrie et compacité.	Ø	sable + gravier
SMRE		16	% argile	Atterberg	sable + argile
PPI.		159-163	Granulométrie	Densité	sable

4° - Compacité

C.K.	p. 230-232	C	$\emptyset$	Sable
C.K.	275	C	$\emptyset_d$	Argiles
PFI.	52	C	C_c	
EM.	59	Cr	courbes de compression	
EM.	51	Cr	$\emptyset$	Sable argiles
T.P.	84	Cr	$\emptyset$	sable
PRI.	194	n	$\emptyset$	sable argiles
PRI.	209	"	$\emptyset$	sable gravier
PZI.	163	"	$\emptyset$	sable
PZI.	102-105	"	$\emptyset$	sable
LEO.	223	"	Cu/Po	
SCOTT	309	"	$\emptyset$	Sable argiles
BIA.	91	γ_d	R_c	argiles
TSCHE.	151	Cr	$\emptyset'$	sable

5° - Teneur en eau

C.K.	p. 232	w	$\emptyset$	sable
C.K.	257-258	w	Cu	argiles
T.P.	312	w	C_c	argiles
T.P.	130	s	R_c	
LEO.	201	w	C	
SMRE	327	w	R_c	argiles
SMRE	373	w et γ_d	R_c	argile sableuse
SMRE	391	w	CBR	
GRIM	229	W et composition	R_c	argiles
SCOTT	309	w	$\emptyset$	argiles
LEO.	217	w	$\emptyset'$	sable
BIA.	97	w	E	grès
BIA.	91	w	R_c	argile

Cette liste est très réduite ; il faut y ajouter toutes les relations utilisées à l'heure actuelle comme par exemple, la loi de Terzaghi
 $C_c = 0,009 (W_L - 10)$.

Je citerai seulement deux auteurs pour des études synthétiques :

K. FLAATE "A Statistical Analysis of Some Methods for Shear Strength Determination in Soils Mechanics". Norwegian Geotechnical Institute Publication n° 62. 1965

GOLDSTEIN, MISUMSKY et LAPIDUS, Russia "The theory of probability and statistics in relation to the rheology of soils. Proc. 5th International Conf. VOL I 1961.

- Influence de la dispersion dans les calculs - Coefficients de sécurité -

G.G. MEYERHOF. Safety factors in soil mechanics. Canadian Geo technical Journal, 7, 349. Nov. 1970.

Dans cet article, l'auteur a fait le point sur le choix que l'on peut faire à l'heure actuelle dans les coefficients de sécurité des différentes structures. Les coefficients de sécurité sont définis comme le rapport de la résistance de la structure aux charges appliquées. La valeur du coefficient de sécurité dépend principalement :

- de la crédibilité qu'on accorde aux données et de la manière dont on évalue la résistance des structures et les charges appliquées,
- de la précision des analyses des structures,
- de la qualité des constructions et de leur entretien,
- de la probabilité et du risque que fait encourir une défaillance pendant la durée de vie de la structure.

Influences sur la marge de sécurité

La marge de sécurité tiendra compte de la reconnaissance du site, des incertitudes de l'interpolation entre les endroits testés, de la présence de zones de faiblesses, de discontinuités aléatoires.

La marge de sécurité tiendra compte des différences entre les propriétés mécaniques mesurées sur de petites éprouvettes en laboratoire et celles des grandes masses in-situ.

La marge de sécurité tiendra compte des différences entre les conditions réelles et conditions approximatives des profils simplifiés construits à partir des diverses reconnaissances, ainsi que des méthodes de calcul (sol homogène, plasticité parfaite, surfaces de rupture simplifiées) qui utilisent des paramètres globaux.

L'analyse des ouvrages proposés doit inclure les écarts normaux, les tolérances, le comportement des différents composants ainsi que de la totalité de la structure durant toute sa période de vie.

Enfin, la marge de sécurité pourra diminuer pour arriver en fin de service de la structure à une valeur inférieure.

Coefficients de sécurité partiels et globaux

La fourchette des différents coefficients de sécurité globaux est donnée par le tableau I (Terzaghi et Peck 1967).

On utilise les valeurs supérieures pour l'analyse des ouvrages à des conditions de service normales et les valeurs inférieures pour des calculs basés sur des conditions de chargement maximales (sauf tremblement de terres) et travaux temporaires, ainsi que pour les analyses basées sur les résultats d'essais en vraie grandeur ou sur des ouvrages similaires dans les mêmes conditions.

Dans des conditions extrêmes de chargement ou en fin de service de l'ouvrage, on utilise un coefficient de sécurité marginal de 1,1.

Comme la résistance du sol et les charges appliquées sont en quelque sorte des variables indépendantes, une marge de sécurité plus uniforme pour les différents types et éléments de structure peut être obtenue en utilisant des facteurs de sécurité distincts, un pour la résistance, l'autre pour les charges (Freudenthal 1956 et 1968 ; Pugsley 1955 et 1966). Ces coefficients doivent assurer la même marge de sécurité minimale dans les coefficients globaux déterminés par l'expérience.

Certains auteurs préconisent de les prendre différents selon les paramètres affectés, cohésion ou frottement (Taylor 1948, Brinch Hansen 1956 et 1965, Hueckel 1964), d'autres de les prendre égaux (Janbu) en tolérant une certaine incertitude sur les pressions interstitielles.

De même, des coefficients peuvent différer suivant le caractère statique ou dynamique des forces appliquées.

Voici en résumé les valeurs proposées. Tableau II.

TABLE I
Values of minimum overall safety factors

Failure type	Item	Safety factor
Shearing	Earthworks	1.3 to 1.5
	Earth retaining structures	1.5 to 2
	Foundations	2 to 3
Seepage	Uplift, heave	1.5 to 2.5
	Exit gradient, piping	3 to 5

TABLE II
Values of minimum partial safety factors

Item	Shearing strength parameter	Safety factor
Earthworks and earth retaining structures	Cohesion (c)	1.5
	Friction ($\tan \phi$)	1.2
	Cohesion and friction	1.3 to 1.5
Foundations	Cohesion (c)	2 to 2.5
	Friction ($\tan \phi$)	1.2 to 1.3
Dead loads	—	1.0
Water pressures	—	1.0 to 1.2
Live loads	—	1.2 to 1.5

L'utilisation de ces coefficients pour les travaux en terre et fondations est encore restée limitée ; leur efficacité n'est pas encore totalement évaluée dans la pratique.

Concepts de probabilité de sécurité structurale

Concepts et critères de sécurité ont été étudiés dans des articles (Freudenthal 1956 et 1968 ; Pugsley 1955) et dans un premier livre consacré à ce sujet (Pugsley 1966).

L'interprétation probabilistique des coefficients de sécurité demande, entre autre, l'évaluation des valeurs numériques d'un risque de rupture acceptable sur la base de considérations personnelles, économiques ou d'autres critères (LEVI 1968).

La figure 1 montre les courbes de distribution de fréquence des charges appliquées Q et de la résistance du sol R . Le facteur de sécurité global est $F_o = R_o/Q_o$. Le point commun $Q_1 = R_1$ représente l'état limite atteint lors de la rupture ; à cet état correspondent des coefficients de sécurité partiels $F_q = Q_1/Q_o$ et $F_r = R_o/R_1$.

La courbe R peut varier dans le temps modifiant F_o , F_q et F_r .

Dans la zone de recouvrement, il existe une probabilité de rupture P_F que l'on peut estimer si les deux courbes Q et R sont connues. Dans certains cas, ces courbes peuvent être approchées par des courbes normales ou logarithmes normales (Langejan 1955).

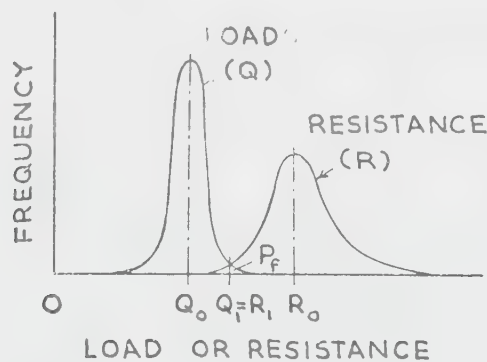


FIG. 1. Frequency distributions of loads and resistance.

Il s'en suit qu'on n'a pas une sécurité absolue, mais un "risque calculé". Le recensement des ruptures de barrages en terre construits depuis 30 ans montre qu'1 % se sont rompus (1/3 par glissement, 2/3 par piping) ; au coefficient de sécurité de 1,5 est alors associée la probabilité de rupture de 0,5% ce qui est considérable.

Pour les autres ouvrages en terre, la probabilité de rupture serait moindre : 0,1 % pour les grands ouvrages de soutènement ; la limite supérieure du coefficient de sécurité peut être considérée comme raisonnable.

En ce qui concerne les fondations, on ne connaît pas encore la probabilité de rupture associée aux coefficients globaux, mais on peut dire qu'elle est plus élevée pour la même plage de coefficient de sécurité; elle est de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-5} pour les ouvrages en béton, 10^{-4} à 10^{-6} pour les ouvrages en acier (Freudenthal 1968).

Les coefficients de sécurité globaux utilisés à nos jours correspondent vraisemblablement à une probabilité de rupture de $5 \cdot 10^{-3}$ à 10^{-4} .

Tous ces résultats sont donnés par la figure 2 où on trouve l'ordre de grandeur de la plage de probabilité de rupture de stabilité pour des calculs à la limite supérieure de coefficients de sécurité conventionnels.

Cette approche "semi-probabilistique" a une portée limitée. Cependant, il est à remarquer que ces résultats sont en accord avec les coefficients de variations globaux ($\frac{\text{écart type}}{\text{résistance moyenne}}$) dans le domaine 0,1 à 0,2 sur la base d'une distribution normale et dans le domaine 0,1 à 0,3 sur la base d'une distribution logarithme-normale.

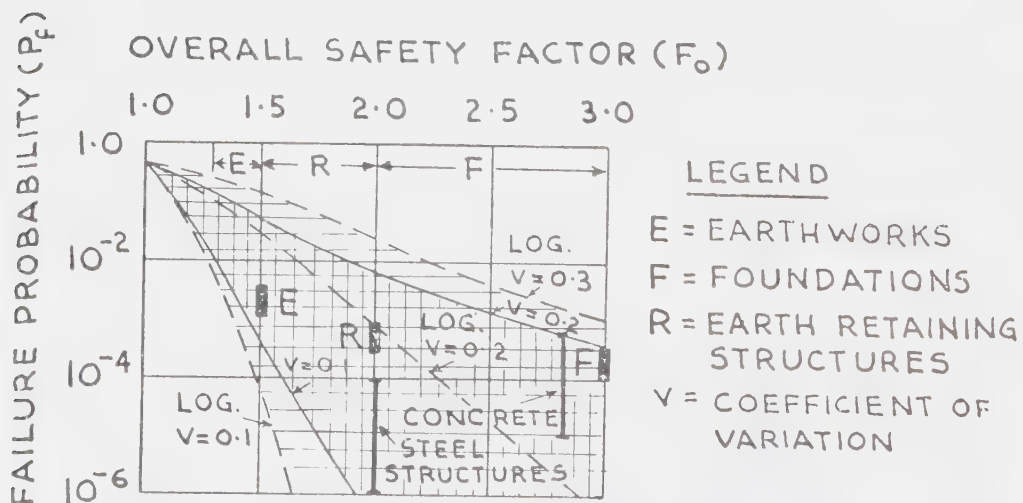


FIG. 2. Comparison between safety factor and probability of stability failure.

REFERENCES

- BISHOP, A. W. and BJERRUM, L. 1960. The relevance of the triaxial test to the solution of stability problems. Amer. Soc. Civil Eng. Conf. Shear Strength of Cohesive Soils, Boulder, Colorado. p. 437.
- CASAGRANDE, A. 1965. Role of calculated risk in earthwork and foundation engineering. J. Soil Mech. Found. Div., Proc. Amer. Soc. Civil Eng. 91, SM4, p. 1.
- DAVIS, F. J. 1953. Quality control of earth embankments. Proc. Int. Conf. Soil Mech., 3 rd. Zurich, 1, p. 218.
- FELD, J. 1965. The factor of safety in soil and rock mechanics. Proc. Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., 6th, Montreal, Quebec. 3, p. 185.
1968. Construction failure. John Wiley and Sons, New York.
- FREUDENTHAL, A. M. 1956. Safety and the probability of structural failure. Trans. Amer. Soc. Civil Eng. 121, p. 1337.
1968. Critical appraisal of safety criteria and their basic concepts. Prel. Publ. 8th Congr. Int. Ass. Bridge and Struct. Eng., New York. p. 13.
- HANSEN, J. BRINCH. 1956. Limit design and partial safety factors in soil mechanics. Danish Geot. Inst., Bull. 1, p. 1.
1965. The philosophy of foundation design : design criteria, safety factors and settlement limits. Symp. Bearing Capacity and Settl. of Found., Duke University, Durham, North Carolina. p. 9.
- HOOVER, J. A. and BUTLER, F. A. 1966. Some numerical results concerning the shear strength of London clay. Géotechnique, 16, p. 282.
- HUECKEL, S. 1964. The problem of safety in soil mechanics and foundation engineering. Proc. Sem. Soil Mech., Lodz, p. 137.
- JANBU, N., BJERRUM, L., and KJAERNSLI, B. 1956. Soil mechanics applied to some engineering problems. Norweg. Geot. Inst., Publ. 16, p. 1.
- LANGEJAN, A. 1965. Some aspects of the safety factor in soil mechanics considered as a problem of probability. Proc. Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., 6th, Montreal, Quebec. 2, p. 500.
- LEVI, R. 1958. Les calculs de sécurité en matière de fondations. Ann. Inst. Tech. Bat. et Trav. Publ. 11, p. 541.
- LUMB, P. 1966. The variability of natural soils. Can. Geotech. J. 3, p. 74.
- MIDDLEBROOKS, T. A. 1953. Earth-dam practice in the United States. Cent. Trans. Amer. Soc. Civil Eng. CT, p. 697.
- PECK, R. B., IRELAND, H. O., and TENG, C. Y. 1948. A study of retaining wall failures. Proc. Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. 2nd. Rotterdam. 3, p. 296.
- PUGSLEY, A. 1955. Report on structural safety. Struct. Engineer, 34, p. 141.
1966. The safety of structures. Arnold, London.

- SKEMPTON, A. W. 1964. Long-term stability of clay slopes. *Géotechnique*, 14, p. 77.
- SZECHY, K. 1961. Foundation failures. Concrete Publ., London.
- TAYLOR, D. W. 1948. Fundamentals of soil mechanics. John Wiley and Sons, New York. p. 414.
- TERZAGHI, K. and PECK, R. B. 1967. Soil mechanics in engineering practice. John Wiley and Sons, New York.
- THORNBURN, T. H. and LARSEN, W. R. 1959. A statistical study of soil sampling. *J. Soil Mech. Found. Div., Proc. Amer. Soc. Civil Eng.* 85, No. SM 5, p. 1.
- TURNBULL, W. J., COMPTON, J. R., and AHLVIN, R. G. 1966. Quality control of compacted earthwork. *J. Soil Mech. Found. Div., Proc. Amer. Soc. Civil Eng.* 92, No. SM 1, p. 93.
- WARD, W. H., MARSLAND, A., and SAMUELS, S. G. 1965. Properties of the London clay at the Ashford common shaft. *Géotechnique*, 15, p. 321.
- WU, T. H. and KRAFT, L. M. 1967. The probability of foundation safety. *J. Soil Mech. Found. Div., Proc. Amer. Soc. Civil Eng.* 93, No. SM 5, p. 213.

- Reconnaissance des sols en place - Cartographie géotechnique

Les auteurs qui suivent ont fait les publications citées ci-dessous, au Premier Congrès International de l'Association Internationale de Géologie de l'Ingénieur - Symposium de Cartographie - Paris, Septembre 1970.

G. BONDARIK : Problème de prévision spatiale des propriétés géologiques des roches à la base des conceptions de la théorie de la variabilité.

L'auteur se propose de réaliser des cartes géotechniques à l'échelle du territoire de l'URSS. Il doit faire des estimations à partir d'un échantillonnage représentatif des terrains. Lorsque le paramètre étudié s'avère varier en régime stationnaire, il est possible d'utiliser la théorie des fonctions aléatoires.

Pratiquement, des "trend surfaces" du type polynomial ont été calculées sur ordinateur à Vsegingeo (URSS), par exemple pour des indices de plasticité. Les résultats obtenus concordent bien avec la réalité.

Références (en russe)

YAGLOM A.M. - Introduction à la théorie des fonctions éventuelles stationnaires, Uspekhi matematiki, t.VII, vip 5/51, 1952.

VISTELIUS A.B. - Types principaux des solutions des problèmes mathématiques dans la géologie actuelle. Rasvedka i okhrana nedr, N°6, 1964.

BARLETT M.S. - Introduction à la théorie des processus eventuels. Isd. Inostr. Lit. Moscou 1958.

S. KARACSONYI - P. REMENYI : The signifiance of the explorations connected with the town development in the engineering-geological mapping.

La proportion de l'applicabilité réitérée des données d'analyse et d'ex-

Fig. 8 - Ville Nouvelle d'Evry - Epaisseur du Limon des Plateaux

B : Courbes isopaques

Quelques phénomènes parasites ont lieu à la bordure de la zone où nous avons des informations. D'autre part, quelques "becs" pointus ne correspondant à rien dans la réalité n'ont pas pu être éliminés au lissage. Le plan de situation a été laissé en fond pour voir la correspondance.

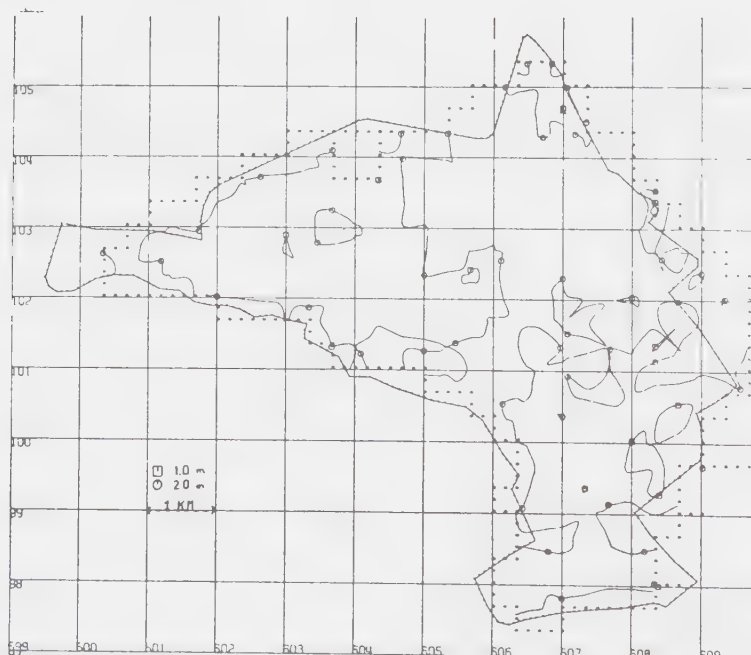
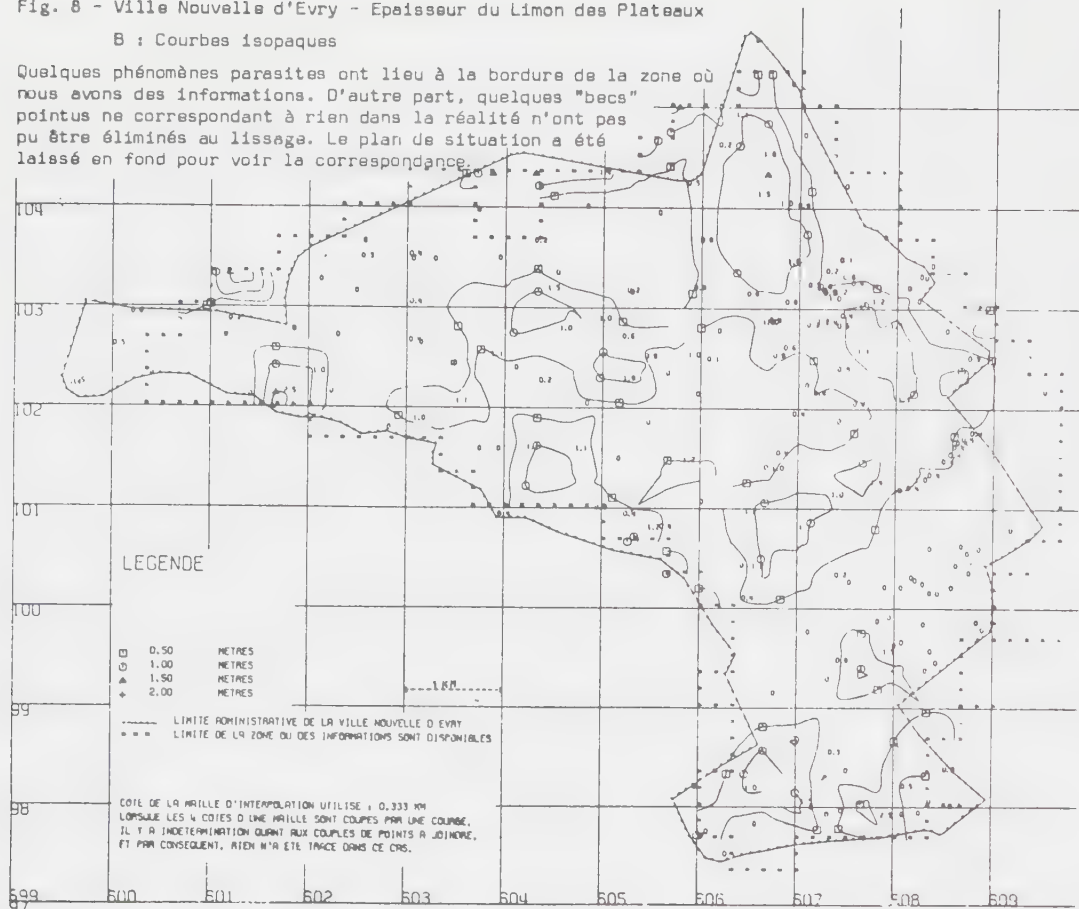


Fig. 9- Ville Nouvelle d'Evry. Epaisseur du Limon des Plateaux.

C : courbes d'isoerreur.

Il s'agit de l'erreur maximale possible. L'erreur réelle en pratique ne dépasse guère le quart de la valeur indiquée ici. Les remarques faites pour la carte B sont aussi valables ici.

exploitation et des exploitations nouvelles et nécessaires détermine fondamentalement l'efficacité de la confection d'une carte géologique. Les résultats des exploitations anciennes, la quantité, la répartition, la qualité et la valeur de l'applicabilité montrent de grandes différences. Cette circonstance détermine l'échelle et la sécurité de levé de terrain.

Les auteurs s'occupent des résultats hongrois de l'évaluation mathématique et de l'abord plus exact de ces problèmes.

A. THOMAS : Réflexions sur la cartographie géotechnique.

Un accent tout particulier doit être mis sur la nécessité de connaître et faire connaître à l'utilisateur la précision des cartes et donc leurs limites d'utilisation. A cet effet l'auteur propose l'utilisation au stade des documents préparatoires, de méthodes de cartographie automatique permettant la délimitation statistique des domaines d'incertitude.

Références :

MALLET J.L. - Programme de cartographie automatique avec détermination des surfaces de confiance. Centre Rech. Petrog. Geoch. CNRS. Nancy 1967.

ROUSSEAU J. - MONEK G. et ACHAIN R. - Contribution à l'étude des corrélations existant entre les caractéristiques géotechniques et géologiques d'une formation meuble - Comptes rendus du 6ème Congrès Internat. Mec. Sols. Trav. Fond. - Montréal 1965

M. ARNOULD - M. VANTROYS : Essai de cartographie géotechnique automatique sur la ville nouvelle d'Evry (Région Parisienne).

Les auteurs utilisent l'ordinateur pour la réalisation de cartes géotechniques analytiques :

- Toutes les informations concernant le sous-sol d'une région peuvent

être fournies à la machine en clair : un fichier magnétique remplace les dossiers traditionnels.

- Les interpolations pour tracer automatiquement des courbes de niveaux ou d'isovaleur restent délicates. Toutefois, le krigeage de G. MATHERON a permis des réalisations dans ce sens.

Les auteurs présentent une carte obtenue par ordinateur.

Le coût d'une telle méthode ne semble pas prohibitif, du moins lorsqu'elle est employée pour un site où les informations sont abondantes et en rapide accroissement.

Références:

MATHERON G. - Traité de géostatistique appliquée, Mémoire BRGM, Paris N°24, 1963.

MATHERON G. - Le krigeage universel, Cahiers du Centre de Morphologie mathématique de l'E.N.S.M.P., Paris 1969.

VANTROYS M., CAMINADE D., COURAUD - Essai de cartographie géotechnique automatique, Bibliothèque de l'E.N.S.M.P., Paris 1969 (inédit).

WEISS A. - A decade of digital computing in the mineral industry. Intern. Symposium, Salt Lake City (UTAH), 1969.

Je citerai pour terminer un article présentant un outil mathématique destiné à l'estimation d'un paramètre dans une région spatiale déterminée : les variables régionalisées.

G. MATHERON : Présentation des variables régionalisées - Revue de l'Industrie Minière, Vol.51 N°8, Août 1969.

Certains phénomènes peuvent se caractériser localement par certaines grandeurs variant numériquement dans l'espace (la teneur dans un gisement minier par exemple) ; ce sont ces fonctions numériques que l'on appelle "variables régionalisées".

Ces fonctions ni continues ni dérivables en général, comportent un aspect "aléatoire" qui rend compte de l'insuffisance des méthodes traditionnelles d'estimation des gisements miniers. Les interpolations fonctionnelles, en effet, impliquent un degré de continuité du phénomène représenté, qui n'existe pas ici.

Inversement, une régionalisation conserve toujours, dans sa variation spatiale, un caractère structuré dont les méthodes purement statistiques ne peuvent rendre compte.

Il fallait donc trouver une méthode de formulation synthétique capable de rendre compte de ces 2 caractères (aléatoire et structuré) des variables régionalisées et de résoudre des problèmes pratiques, tels que celui de l'erreur commise dans l'estimation d'une variable régionalisée à partir d'un échantillon fragmentaire.

Le langage qu'il convient de prendre, à la fois probabiliste et structuraliste, est celui des fonctions aléatoires, mais il implique certaines hypothèses fondamentales et probabilistes. Il faut préalablement examiner jusqu'où l'on peut aller sans l'introduction de ces hypothèses, c'est-à-dire en utilisant des méthodes purement géométriques (non probabilistes) appelées "méthodes transitives".

L'auteur examine ensuite le correspondant probabiliste de ces méthodes, en considérant qu'une variable régionalisée peut être considérée comme une réalisation d'une fonction aléatoire. Dans les Sciences de la Terre, où les expériences ne peuvent se répéter comme on veut, l'inférence statistique n'est en général pas possible, sauf dans le cas des fonctions aléatoires "stationnaires", et il y a des cas où la variable régionalisée peut être regardée comme une réalisation d'une fonction aléatoire stationnaire. L'auteur montre que les 2 méthodes fournissent des résultats ultimes équivalents, ce qui indique que l'arbitraire introduit par les hypothèses probabilistes est assez réduit.

A la fin de son article, l'auteur évoque des problèmes comme le krigeage (ou recherche de l'estimateur optimal), la simulation numérique de gisements miniers, la théorie des milieux poreux, etc... pour lesquels il renvoie à la bibliographie suivante.

- Traité de géostatique appliquée - Tome I (1962), Tome II (1963), Ed. Technip, Paris.

- Les variables régionalisées et leur estimation (thèse) Masson - Paris 1965.

- Recherche d'optimum économique dans la reconnaissance et la mise en exploitation des gisements miniers. En collaboration avec Formery. Annales des Mines, Mai et Juin 1963.

- Principles of Geostatistics. Economic Geology. December 1963.

- Structure et composition des perméabilités. Revue de l'I.F.P. Avril 1966.

- Comparaison entre les échantillonnages à poids constant et à effectif constant. Revue de l'Industrie Minière. Août 1966.

- Eléments pour une théorie des milieux poreux. Paris Masson 1967.

Symposium sur les Applications des Statistiques et Probabilités à la Mécanique des Sols et au Génie Civil.

Ce Symposium s'est tenu à Hong Kong en Septembre 1971. Nous n'avons pas encore reçu les compte-rendus, mais nous tenons néanmoins à signaler ce symposium car il semble avoir fait le tour des questions qui nous préoccupent.

Voici les sujets qui ont été abordés.

Philosophie de conception et calculs

Les concepts probabilistiques dans la conception et le calcul des structures et travaux en terre , marges de sécurité, évaluation des risques admis, existence de valeurs extrêmes, utilisation de la théorie statistique de décision.

Les statistiques des paramètres de conception et calcul

Les distributions actuelles des charges statiques, dynamiques et charges de vent , distribution de la résistance des structures (à l'exclusion des études sur la résistance à la fatigue). Distribution de la résistance du sol, compressibilité, perméabilité, etc; l'optimisation des moyens de recherche des données pour le calcul dans les projets présents et futurs, la précision, l'exactitude et la crédibilité des méthodes d'essais au laboratoire et au chantier.

Etudes d'interactions

Les réactions des structures et des sols aux charges stochastiques internes et externes, à la gravité, à l'hydrologie, à l'aérodynamique, aux tremblements de terre, etc..

Contrôles et normes

Cas historiques des méthodes de contrôles de qualité des normes et de l'inspection dans des travaux de construction ; comparaison des buts aux réalisations ; l'économie de contrôle.

Application de la théorie des probabilités

Les développements récents de la théorie appliqués aux problèmes de

Génie Civil.

Le lecteur qui voudrait se procurer les comptes rendus doit s'adresser
à M. P. LUMB

Department of civil engineering

University of Hong Kong

HONG-KONG

PRINCIPAUX SYMBOLES ET RELATIONS

I - GENERALITES

π	: 3,14159
e	: 2,7183 base des logarithmes naturels
$\log_e$, $\ln$	a: logarithme naturel de a
$\log_{10}$	a, $\log a$: logarithme de a (base 10)
t	: temps
m	: masse
g	: 9,81 m/s ² : accélération de la pesanteur
Γ	: accélération : $F = m\Gamma$
F_N , F_T	: composantes normale et tangentielle de la force
V	: volume - ΔV : variation de volume
W	: Poids
M	: Moment
F	: facteur de sécurité - à définir chaque fois.

II - CONTRAINTES - DEFORMATIONS

U_w	: pression interstitielle totale
U	: pression interstitielle rapportée à la pression atmosphérique $U = U_w - H$
U_o	: contrepression initiale dans le triaxial
σ	: vecteur contrainte totale sur un élément de plan
σ'	: vecteur contrainte effective sur un élément de plan , $\sigma = \sigma' + U$
σ_n , τ	: composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte
δ	: inclinaison de σ sur la normale au plan
σ_{ij}	: tenseur de contrainte en 1 point
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	: directions principales du tenseur - contraintes principales

On note aussi couramment :

$$\sigma_{xx} = \sigma_x$$

$$\sigma_{xy} = \tau_z$$

II

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_i \end{pmatrix} + (\bar{\sigma}_d)$$

σ_i ou p : partie isotrope du tenseur

$\bar{\sigma}_d$: partie déviatoire du tenseur

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

La partie déviatoire peut être caractérisée par 2 paramètres ρ et φ , coordonnées polaires de l'extrémité du vecteur contrainte dans le plan déviateur.

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{-2 \left[\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2 - \frac{2}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \right]} \\ &= \sqrt{-2 \left[\frac{1}{2} (\sigma_{ii}^2 - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) - \frac{2}{3} \sigma_{ii} \right]} = \sqrt{\sigma_{ij} \sigma_{ji} + \frac{1}{3} \sigma_{ii}^2} \end{aligned}$$

ρ_σ est un scalaire qui définit (incomplètement) l'état déviatoire en contrainte.

Note : l'indice c caractérise les états consolidés ou écrouis.

u_i : composantes du déplacement

$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$: déformation relative

ϵ_{ij} : tenseur des déformations

On note couramment :

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_x$$

$$\epsilon_{xy} = \gamma_z$$

Relations :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \gamma_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \epsilon_{ij} \end{pmatrix} + \begin{matrix} \text{deform.} & & \text{rotation} \\ \text{pure} & & \text{pure} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$: directions principales du tenseur ϵ_{ij} ; déformations principales

ϵ_i : partie isotrope du tenseur ϵ_{ij}

$\bar{\epsilon}_d$: partie déviatoire du tenseur ϵ_{ij} ; caractérisable aussi par un rayon vecteur : ρ_ϵ

ρ_ϵ est un scalaire qui définit (incomplètement) l'état déviatoire en déformation

$(F_{ij}) = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j}$: tenseur gradient de déformation $\bar{x}_i = x_i + u_i$

x_i : coordonnées initiales

$\bar{x}_i$: coordonnées à l'instant t

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} - \delta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = (\epsilon_{ij}) + \text{rotation pure.}$$

III

v_i : composantes de la vitesse d'un point

d_{ij} : tenseur vitesse de déformation $d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$

g_{ij} : tenseur gradient de vitesse $g_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

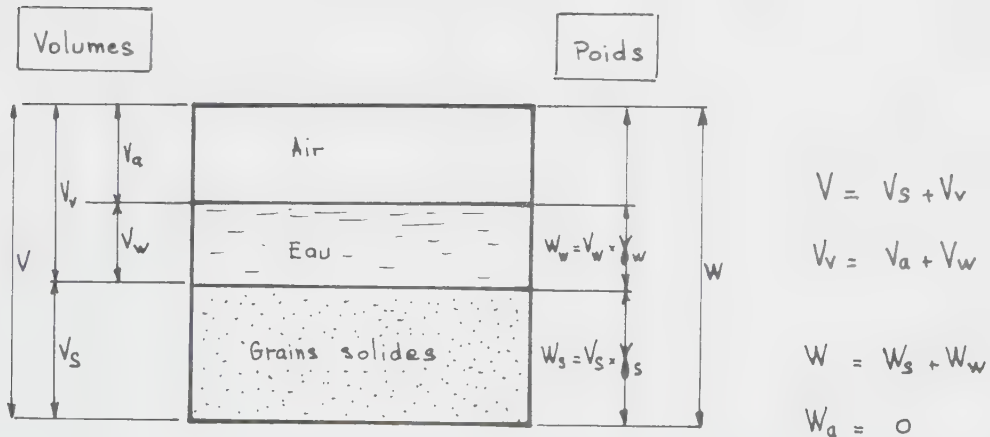
élasticité infinitésimale : u_i petit $\left[d_{ij} \approx \frac{d}{dt} \epsilon_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} \right]$

η : coefficient de viscosité (rapport de la contrainte à la vitesse de déformation relative.

III - PROPRIETES DU SOL

III - 1 Nature et état

- Géométrie -



$$e = \frac{V_v}{V_s}$$

indice des vides

$$n = \frac{V_v}{V}$$

porosité

$$e = \frac{n}{1 - n}$$

$$n = \frac{e}{1 + e}$$

- Masse -

γ_w poids volumique de l'eau

$\gamma = \frac{W}{V}$ poids volumique du sol humide

IV

γ_s	$= \frac{W_s}{V_s}$	poids volumique des grains solides
γ_d	$= \frac{W_s}{V}$	poids volumique du sol sec
γ_{sat}	$= \frac{W_s + V_v \cdot \gamma_w}{V}$	poids volumique du sol saturé
γ'	$= \gamma_{sat} - \gamma_w$	poids volumique du sol immergé
G	$= \frac{\gamma_s}{\gamma_w}$	densité des grains solides
γ_c		poids volumique critique
w	$= \frac{W_w}{W_s} \cdot 100$	teneur en eau
w_{sat}	$= \frac{V_v \cdot \gamma_w}{W_s} \cdot 100$	teneur en eau du sol saturé
w_{nat}		teneur en eau naturelle des sols en place
S_r	$= \frac{V_w}{V_v}$	degré de saturation
θ	$= \frac{V_w}{V}$	teneur en eau volumétrique

RELATIONS

Valeur de	En fonction de					
	n	e	γ_d	γ_{sat}	γ'	w_{sat}
Porosité		$\frac{e}{1 + e}$	$1 - \frac{\gamma_d}{G \gamma_w}$	$\frac{G \gamma_w - \gamma_{sat}}{(G-1) \cdot \gamma_w}$	$1 - \frac{\gamma'}{(G-1) \cdot \gamma_w}$	$\frac{G \cdot w_{sat}}{1 + G \cdot w_{sat}}$
Indice des vides	$\frac{n}{1 - n}$		$\frac{G \gamma_w}{\gamma_d} - 1$	$\frac{G \gamma_w - \gamma_{sat}}{\gamma_{sat} - \gamma_w}$	$\frac{(G-1) \cdot \gamma_w}{\gamma'} - 1$	$G \cdot w_{sat}$
Poids volumique sec	$G(1-n) \cdot \gamma_w$	$\frac{G}{1+e} \cdot \gamma_w$	γ_d	$\frac{G \gamma_{sat} - \gamma_w}{G - 1}$	$\frac{G}{G-1} - \gamma'$	$\frac{G \cdot \gamma_w}{1 + G \cdot w_{sat}}$
Poids volumique saturé	$[G - n(G-1)] \gamma_w$	$\frac{(G+e) \cdot \gamma_w}{1 + e}$	$\frac{G-1}{G} \gamma_d + \gamma_w$		$\gamma' + \gamma_w$	$\frac{(1 + w_{sat}) G \gamma_w}{1 + G \cdot w_{sat}}$
Poids volumique immergé	$(G-1)(1-n) \gamma_w$	$\frac{G-1}{1+e} \cdot \gamma_w$	$\frac{G-1}{G} \cdot \gamma_d$	$\gamma_{sat} - \gamma_w$		$\frac{(G-1) \cdot \gamma_w}{1 + G \cdot w_{sat}}$
Teneur en eau de saturation	$\frac{n}{G(1-n)}$	$\frac{e}{G}$	$\frac{\gamma_w}{\gamma_d} - \frac{1}{G}$	$\frac{G \gamma_w - \gamma_{sat}}{(\gamma_{sat} - \gamma_w) G}$	$\frac{(G-1) \cdot \gamma_w}{G \cdot \gamma'} - \frac{1}{G}$	

$$S_r = \frac{w}{w_{sat}} = \frac{w}{\gamma_w \left(\frac{1}{\gamma_d} - \frac{1}{\gamma_s} \right)} = \frac{\theta}{n}$$

$$\gamma_s = G \cdot \gamma_w$$

$$\theta = S_r \cdot n$$

		Phase liquide : humidité	
		Teneur en eau W	Degré de saturation Sr
Phase solide : compacité	n	$\gamma = G \cdot \gamma_w \cdot (I-n)(I+w)$	$\gamma = [G(I-n) + nS_r] \cdot \gamma_w$
	e	$\gamma = \frac{G \cdot \gamma_w}{I+e} \cdot (I+w)$	$\gamma = \frac{G + e \cdot S_r}{I + e} \cdot \gamma_w$
	γ_d	$\gamma = \gamma_d \cdot (I + w)$	$\gamma = \frac{G-S_r}{G} \cdot \gamma_d + S_r \cdot \gamma_w$
	γ_{sat}	$\gamma = \frac{G}{G-I} (\gamma_{sat} - \gamma_w)(I-w)$	$\gamma = \frac{G-S_r}{G-I} \cdot \gamma_{sat} + \frac{G(S_r-I)}{G-I} \cdot \gamma_w$
	γ'	$\gamma = \frac{G}{G-I} \cdot \gamma' (I + w)$	$\gamma = \frac{G-S_r}{G-I} \cdot \gamma' + S_r \cdot \gamma_w$
	w_{sat}	$\gamma = \frac{G \cdot \gamma_w}{I+G \cdot w_{sat}} (I + w)$	$\gamma = \frac{I+S_r \cdot w_{sat}}{I+G \cdot w_{sat}} \cdot G \cdot \gamma_w$

Nota Bene : La connaissance de γ_d , G, γ_w , W permet celle de tous les termes définis.

Généralement, on prend $\gamma_w = 1 \text{ g/cm}^3$

Pour G, si on n'en dispose pas, on peut adopter G = 2,7

Les caractéristiques de masse se réduisent alors à la connaissance de γ_d , W.

- Grains -

D_x	dimensions des éléments à x% de tamisat
$U = \frac{D_{60}}{D_{10}}$	coefficient d'uniformité
$C_c = \frac{D_{30}^2}{D_{10} \cdot D_{60}}$	coefficient de courbure
F	% de Filler (% de grains de dimensions inférieure à 74)
$\frac{\Sigma}{n}$	facteur de SCHON

VI

- Consistance -

Sols cohérents

W_L	limite de liquidité
W_P	limite de plasticité
W_S	limite de retrait
$I_P = W_L - W_P$	indice de plasticité
$I_L = \frac{w - W_P}{I_P}$	indice de liquidité
$I_C = \frac{W_L - w}{I_P}$	indice de consistance
$S_t = \frac{\text{Résistance à la compression simple}}{\text{Résistance à la compression simple remaniée}} = \frac{R_c}{R_c \text{ remaniée}}$	: sensibilité ou sensibilité

Sols pulvérulents

$e_{\max}$	indice des vides dans l'état le plus meuble
$e_{\min}$	indice des vides dans l'état le plus dense
$I_D = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}}$	indice de compacité. D_r est aussi utilisé

OPN	indice d'un paramètre mesuré à l'optimum au Proctor Normal
OPM	indice d'un paramètre mesuré à l'optimum au Proctor Modifié
$W_{\bar{U}} = 20$	teneur en eau optimum pour une contrainte d'écrouissage de 20 bar

- Activité -

$I_A = \frac{I_P}{\% < 2\mu}$	activité colloïdale (Skempton 1953)
-------------------------------	-------------------------------------

III - 2 Liquide

h	: charge hydraulique	$h = \frac{p}{\gamma_w} + z + \frac{v^2}{2g}$
i	: gradient hydraulique	
μ	: coefficient de viscosité dynamique	$dF = \mu \, ds \, \frac{dv}{dn}$
k	: coefficient de perméabilité de Darcy	
v	: vitesse moyenne de l'écoulement	$v = -ki$
q	: débit	
j	: force de filtration par unité de volume	

III - 3 Relations contraintes - déformationsChemin "triaxial" ou isotrope

$E := \frac{\sigma_1}{\epsilon_1}$	module de Young
$= -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$	coefficient de Poisson
$E_{o,1} - 1$	module de Young mesuré entre $= 0,1$ bar et $= 1$ bar
$E_g - 0,1$	module de Young mesuré entre $= 1$ bar et $= 0,1$ bar
$E_i = \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}$	module isotrope
E_d	module déviatoire
$K = \frac{\sigma_i}{3\epsilon_i}$	module de déformation volumique
λ	coefficient de Lamé
μ	module de distortion
$G = \mu = \frac{E_d}{2}$	module de déformation par glissement

Chemin oedométrique

$\overline{E} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \epsilon}$	module oedométrique pente de la courbe de charge sur le diagramme $(\frac{\Delta h}{h}, \sigma)$
$\overline{E}_g$	module oedométrique pente de la courbe de déchargement sur le diagramme $(\frac{\Delta h}{h}, \sigma)$
$m_v = \frac{-\Delta e}{(1+e)\Delta \sigma}$	coefficient de compressibilité $m_v = \frac{I}{E}$
$C_c = \frac{-\Delta e}{\Delta \log_{10} \sigma}$	indice de compression pente de la courbe sur le diagramme $(\log_{10} \sigma, e)$
c_v	coefficient de consolidation $c_v = \frac{k \cdot \overline{E}}{\gamma_w}$
T_v	facteur temps $c_v = \frac{T_v \cdot d^2}{t}$ (d parcours de drainage)
γ	tassement
U	degré de consolidation $= \frac{\gamma - \gamma_o}{\gamma_\infty - \gamma_o}$
$U_z = 1 - \frac{u}{u_o}$	pourcentage de dissipation de la pression interstitielle.

Relation entre les différents paramètres en élasticité infinitésimale

Les relations entre les σ_{ij} et ϵ_{ij} sont linéaires.

Elles dépendent de 21 coefficients dus à Cauchy.

Pour les sols dans le cas le plus général de la symétrie de révolution par rapport à un axe, ces 21 paramètres se réduisent à 5.

Dans le cas de l'isotropie, ils se réduisent à 2

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= 2\mu \varepsilon_{ii} + \lambda(\varepsilon_{ii} + \varepsilon_{jj} + \varepsilon_{kk}) \\ \tau_i &= \mu \gamma_i \quad \text{soit} \quad \sigma_{jk} = \mu \cdot \varepsilon_{jk}\end{aligned}$$

Relations entre les différents paramètres en isotropie

en fonction de paramètre	$\bar{E}$ et λ	E_i et E_d	E et ν	λ et μ	G et ν
Module oedométrique $\bar{E}$	$\bar{E}$	$\frac{E_i + 2E_d}{3}$	$\frac{E(I-\nu)}{(I+\nu)(I-2\nu)}$	$\lambda + 2\mu$	$\frac{2G(I-\nu)}{I-2\nu}$
Module isotrope E_i	$\bar{E} + 2\lambda$	E_i	$\frac{E}{I-2\nu}$	$3\lambda + 2\mu$	$\frac{2G(I+\nu)}{I-2\nu}$
Module déviatoire E_d	$\bar{E} - \lambda$	E_d	$\frac{E}{I+\nu}$	2μ	$2G$
Module de Young E	$\frac{(\bar{E}-\lambda)(\bar{E}+2\lambda)}{\bar{E}+\lambda}$	$\frac{3E_i \cdot E_d}{2E_i + E_d}$	E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$2G(I+\nu)$
Coefficient de Poisson ν	$\frac{\lambda}{\bar{E}+\lambda}$	$\frac{E_i - E_d}{2E_i + E_d}$	ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+2\mu)}$	ν
Coefficient de Lamé λ	λ	$\frac{E_i - E_d}{3}$	$\frac{E\nu}{(I+\nu)(I-2\nu)}$	λ	$\frac{2G\nu}{I-2\nu}$
Module de distorsion μ	$\frac{\bar{E} - \lambda}{2}$	$\frac{E_d}{2}$	$\frac{E}{2(I+\nu)}$	μ	G

III - 4 Surfaces limites (en contraintes ou déformations)

Courbes intrinsèques (espace σ_n, ζ)

Les paramètres sans ' sont utilisés pour les caractéristiques apparantes

Les paramètres avec ' sont utilisés pour les caractéristiques intergranulaires

C : ordonnée à l'origine d'une droite intrinsèque : cohésion

ϕ : $\text{tg } \phi$ = pente d'une droite intrinsèque : angle de frottement

$$H = \frac{C}{\text{tg } \phi}$$

γ_c : poids volumique du sol en plasticité parfaite (fonction de l'état de contrainte)

C et ϕ dépendent du critère choisi

Indice en haut PP ou r	:	critère de plasticité parfaite (déformation continue à contrainte constante)
Indice en haut M	:	enveloppe maximale de tous les cercles de Mohr
Indice en haut E	:	limite élastique
F_{100}	:	limite de fatigue (pour 100 cycles par ex.)

C et ϕ dépendent des conditions hydrauliques pendant l'essai

Indice en bas d	:	essai drainé
Indice en bas U	:	essai non drainé
" " " CU	:	essai non drainé pendant l'écrasement, mais l'échantillon a connu une procédure de drainage avant le chemin triaxial (consolidation)

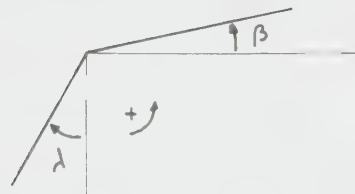
III - 5 Essais mécaniques particuliers

- . $R_c = q_s$ = résistance à la compression simple
- . pénétromètre $R_p = q$ contrainte normale moyenne sous la pointe
 R_l contrainte normale moyenne de frottement latéral
 N nombre de coups SPT
- . Cylindre dilatable p_e pression de début de plasticité parfaite
 p_l pression maximale

IV - OUVRAGES

IV - 1 Soutènement

- | | | |
|------------|---|---|
| β | : | angles des pentes du talus |
| l | : | distance du sommet d'un dièdre au point envisagé |
| δ_r | : | angle de frottement écran-sol |
| δ | : | angle de la contrainte sur l'écran avec la normale à l'écran. |



$K_0 =$	coefficient des terres au repos
K	coefficient sans dimension intervenant dans l'expression de la contrainte normale sur l'écran, à utiliser avec différents indices (cas de Rankine); a : état actif sur l'écran ou poussée sur l'écran p : état passif sur l'écran ou butée sur l'écran
p, b	coefficients de poussée et butée

Utilisés seuls, ils font référence au module du vecteur contrainte ; utilisés avec t, n, v, h , ils font référence aux composantes tangentielle normale, verticale, horizontale du vecteur contrainte sur le plan considéré.

la barre ($\bar{K}, \bar{p}, \bar{b}$) indique que l'on est en milieu non pesant.

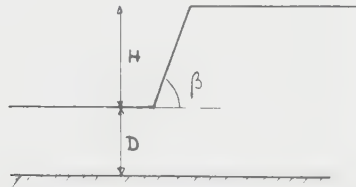
$$b_n \text{ ou } p_n = \frac{\bar{b}_n}{\gamma_1} \quad \bar{b} \text{ ou } \bar{p} = \frac{\text{contrainte uniforme}}{\text{surcharge uniforme}}$$

IV - 2 Fondations

Q	: Force portante limite	
q	: Contrainte normale moyenne	q_{pp} valeur calculée en plasticité parfaite à faible profondeur q_L valeur maximale à la pointe du pieu
B	: Largeur de la fondation	
L	: Longueur de la fondation	
D	: Profondeur de la fondation	
w	: Tassement de la fondation	
N	: Coefficient sans dimension exprimant avec un indice (γ, q, c) les effets respectifs du poids spécifique, de la profondeur et de la cohésion dans l'expression de la pression limite sous la base	
k_s	: $\frac{w}{\bar{v}_n}$ module de réaction	
e	: excentricité de la charge (rapport de la distance au centre à la largeur B)	
e_M	: excentricité optimale	
Q_f	: force d'arrachement limite	
P_f	: poids propre de la fondation	
R	: rayon de la fondation	
P_e	: périmètre du pieu	
S_B	: surface de la fondation ou section droite du pieu	
S_L	: surface latérale	
ϵ	: angle de l'axe de la fondation avec la verticale	
$\mathcal{H}$	: angle de la force d'arrachement (Haubans) avec la verticale	
p_c	: pression critique	

IV - 3 Pentes

- H : hauteur verticale du talus
 D : profondeur de la couche dure sous le pied du talus
 β : angle d'inclinaison du talus avec l'horizontale.



Annexe 2

TABLES D'ANALYSE STATISTIQUE

Ces tables sont tirées du cours d'analyse statistique
du Professeur M. GIRSCHIG à l'ECOLE CENTRALE des ARTS & MANUFACTURES

Les références qu'il a utilisées sont :

- Tables I II IX : Karl Pearson - Tables for Statisticians and Biometricians, **Part 1**
(Cambridge University Press)
- Tables III IV V VI X : R. A. Fisher and F. Yates - Tables for Biological, Agricultural and
Medical Research (Oliver and Boyd, London)
- Table VII : W. G. Cochran - The Distribution of the Largest of a Set of Estimated
Variances as a Fraction of their total. *Annals of Eugenics* Vol. 11 (1941)
pp. 17-52.
- Ataque IX : H. F. Dodge and H. G. Romig : Sampling Inspection Tables (John Wiley
and Sons Inc. New-York).

TABLE I

FONCTION DE DISTRIBUTION DE LA LOI DE LAPLACE-GAUSS
REDUITE OU LOI NORMALE

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,399	0,397	0,391	0,381	0,368	0,352	0,333	0,312	0,290	0,266
1	0,242	0,218	0,194	0,171	0,150	0,129	0,111	0,094	0,079	0,066
2	0,054	0,044	0,035	0,028	0,022	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006

TABLE II

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE
(Loi de Laplace-Gauss)

Les entrées de la table correspondent à la valeur de l'intégrale :

$$P = F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

correspondant à l'aire hachurée sur la figure ci-contre

La courbe étant symétrique : $F(-x) = 1 - F(x)$

Les valeurs absolues des déviations x figurent dans le corps de la table.

Les probabilités P correspondant à des déviations x négatives ($P < 0,5$), doivent être lues en utilisant la colonne de gauche et la ligne supérieure de la table.

Pour les valeurs de x positives, on lira les probabilités P en utilisant la colonne de droite et la ligne inférieure du tableau.

EXEMPLE :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = + 1,96 \\ x = - 1,96 \end{cases} & \quad \begin{aligned} F(+ 1,96) &= 0,975 \\ F(- 1,96) &= 0,025 \end{aligned} \\ \begin{cases} x = + 0,699 \\ x = - 0,699 \end{cases} & \quad \begin{aligned} F(+ 0,699) &= 0,758 \\ F(- 0,699) &= 0,242 \end{aligned} \end{aligned}$$

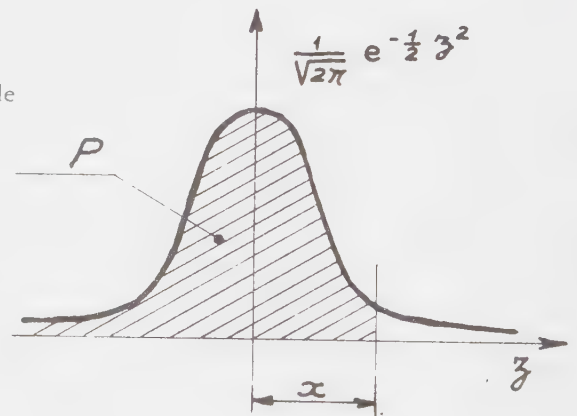


TABLE II

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE
(Loi de Laplace - Gauss)

$P=F(x)$	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	
0,00		3,0902	2,8782	2,7478	2,6521	2,5758	2,5121	2,4573	2,4089	2,3656	2,3263	0,99
0,01	2,3263	2,2904	2,2571	2,2262	2,1973	2,1701	2,1444	2,1201	2,0969	2,0749	2,0537	0,98
0,02	2,0537	2,0335	2,0141	1,9954	1,9774	1,9600	1,9431	1,9268	1,9110	1,8957	1,8808	0,97
0,03	1,8808	1,8663	1,8522	1,8384	1,8250	1,8119	1,7991	1,7866	1,7744	1,7624	1,7507	0,96
0,04	1,7507	1,7392	1,7279	1,7169	1,7060	1,6954	1,6849	1,6747	1,6646	1,6546	1,6449	0,95
0,05	1,6449	1,6352	1,6258	1,6164	1,6072	1,5982	1,5893	1,5805	1,5718	1,5632	1,5548	0,94
0,06	1,5548	1,5464	1,5382	1,5301	1,5220	1,5141	1,5063	1,4985	1,4909	1,4833	1,4758	0,93
0,07	1,4758	1,4684	1,4611	1,4538	1,4466	1,4395	1,4325	1,4255	1,4187	1,4118	1,4051	0,92
0,08	1,4051	1,3984	1,3917	1,3852	1,3787	1,3722	1,3658	1,3595	1,3532	1,3469	1,3408	0,91
0,09	1,3408	1,3346	1,3285	1,3225	1,3165	1,3106	1,3047	1,2988	1,2930	1,2873	1,2816	0,90
0,10	1,2816	1,2759	1,2702	1,2646	1,2591	1,2536	1,2481	1,2426	1,2372	1,2319	1,2265	0,89
0,11	1,2265	1,2212	1,2160	1,2107	1,2055	1,2004	1,1952	1,1901	1,1850	1,1800	1,1750	0,88
0,12	1,1750	1,1700	1,1650	1,1601	1,1552	1,1503	1,1455	1,1407	1,1359	1,1311	1,1264	0,87
0,13	1,1264	1,1217	1,1170	1,1123	1,1077	1,1031	1,0985	1,0939	1,0893	1,0848	1,0803	0,86
0,14	1,0803	1,0758	1,0714	1,0669	1,0625	1,0581	1,0537	1,0494	1,0450	1,0407	1,0364	0,85
0,15	1,0364	1,0322	1,0279	1,0237	1,0194	1,0152	1,0110	1,0069	1,0027	0,9986	0,9945	0,84
0,16	0,9945	0,9904	0,9863	0,9822	0,9782	0,9741	0,9701	0,9661	0,9621	0,9581	0,9542	0,83
0,17	0,9542	0,9502	0,9463	0,9424	0,9385	0,9346	0,9307	0,9269	0,9230	0,9192	0,9154	0,82
0,18	0,9154	0,9116	0,9078	0,9040	0,9002	0,8965	0,8927	0,8890	0,8853	0,8816	0,8779	0,81
0,19	0,8779	0,8742	0,8705	0,8669	0,8633	0,8596	0,8560	0,8524	0,8488	0,8452	0,8416	0,80
0,20	0,8416	0,8381	0,8345	0,8310	0,8274	0,8239	0,8204	0,8169	0,8134	0,8099	0,8064	0,79
0,21	0,8064	0,8030	0,7995	0,7961	0,7926	0,7892	0,7858	0,7824	0,7790	0,7756	0,7722	0,78
0,22	0,7722	0,7688	0,7655	0,7621	0,7588	0,7554	0,7521	0,7488	0,7454	0,7421	0,7388	0,77
0,23	0,7388	0,7356	0,7323	0,7290	0,7257	0,7225	0,7192	0,7160	0,7128	0,7095	0,7063	0,76
0,24	0,7063	0,7031	0,6999	0,6967	0,6935	0,6903	0,6871	0,6840	0,6808	0,6776	0,6745	0,75
0,25	0,6745	0,6713	0,6682	0,6651	0,6620	0,6588	0,6557	0,6526	0,6495	0,6464	0,6433	0,74
0,26	0,6433	0,6403	0,6372	0,6341	0,6311	0,6280	0,6250	0,6219	0,6189	0,6158	0,6128	0,73
0,27	0,6128	0,6098	0,6068	0,6038	0,6008	0,5978	0,5948	0,5918	0,5888	0,5858	0,5828	0,72
0,28	0,5828	0,5799	0,5769	0,5740	0,5710	0,5681	0,5651	0,5622	0,5592	0,5563	0,5534	0,71
0,29	0,5534	0,5505	0,5476	0,5446	0,5417	0,5388	0,5359	0,5330	0,5302	0,5273	0,5244	0,70
0,30	0,5244	0,5215	0,5187	0,5158	0,5129	0,5101	0,5072	0,5044	0,5015	0,4987	0,4959	0,69
0,31	0,4959	0,4930	0,4902	0,4874	0,4845	0,4817	0,4789	0,4761	0,4733	0,4705	0,4677	0,68
0,32	0,4677	0,4649	0,4621	0,4593	0,4565	0,4538	0,4510	0,4482	0,4454	0,4427	0,4399	0,67
0,33	0,4399	0,4372	0,4344	0,4316	0,4289	0,4261	0,4234	0,4207	0,4179	0,4152	0,4125	0,66
0,34	0,4125	0,4097	0,4070	0,4043	0,4016	0,3989	0,3961	0,3934	0,3907	0,3880	0,3853	0,65
0,35	0,3853	0,3826	0,3799	0,3772	0,3745	0,3719	0,3692	0,3665	0,3638	0,3611	0,3585	0,64
0,36	0,3585	0,3558	0,3531	0,3505	0,3478	0,3451	0,3425	0,3398	0,3372	0,3345	0,3319	0,63
0,37	0,3319	0,3292	0,3266	0,3239	0,3213	0,3186	0,3160	0,3134	0,3107	0,3081	0,3055	0,62
0,38	0,3055	0,3029	0,3002	0,2976	0,2950	0,2924	0,2898	0,2871	0,2845	0,2819	0,2793	0,61
0,39	0,2793	0,2767	0,2741	0,2715	0,2689	0,2663	0,2637	0,2611	0,2585	0,2559	0,2533	0,60
0,40	0,2533	0,2506	0,2482	0,2456	0,2430	0,2404	0,2378	0,2353	0,2327	0,2301	0,2275	0,59
0,41	0,2275	0,2250	0,2224	0,2198	0,2173	0,2147	0,2121	0,2096	0,2070	0,2045	0,2019	0,58
0,42	0,2019	0,1993	0,1968	0,1942	0,1917	0,1891	0,1866	0,1840	0,1815	0,1789	0,1764	0,57
0,43	0,1764	0,1738	0,1713	0,1687	0,1662	0,1637	0,1611	0,1586	0,1560	0,1535	0,1510	0,56
0,44	0,1510	0,1484	0,1459	0,1434	0,1408	0,1383	0,1358	0,1332	0,1307	0,1282	0,1257	0,55
0,45	0,1257	0,1231	0,1206	0,1181	0,1156	0,1130	0,1105	0,1080	0,1055	0,1030	0,1004	0,54
0,46	0,1004	0,0979	0,0954	0,0929	0,0904	0,0878	0,0853	0,0828	0,0803	0,0778	0,0753	0,53
0,47	0,0753	0,0728	0,0702	0,0677	0,0652	0,0627	0,0602	0,0577	0,0552	0,0527	0,0502	0,52
0,48	0,0502	0,0476	0,0451	0,0426	0,0401	0,0376	0,0351	0,0326	0,0301	0,0276	0,0251	0,51
0,49	0,0251	0,0226	0,0201	0,0175	0,0150	0,0125	0,0100	0,0075	0,0050	0,0025	0,0000	0,50
	0,010	0,009	0,008	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000	$P=F(x)$

TABLE IIIDISTRIBUTION DE χ^2

La table indique, pour différentes valeurs du nombre de degrés de liberté ν , les valeurs $\chi_{\alpha}^2(\nu)$ pour lesquelles il existe une probabilité α pour que la variable $\chi^2(\nu)$ soit supérieure à $\chi_{\alpha}^2(\nu)$

$$P \left\{ \chi^2(\nu) > \chi_{\alpha}^2(\nu) \right\} = \alpha$$

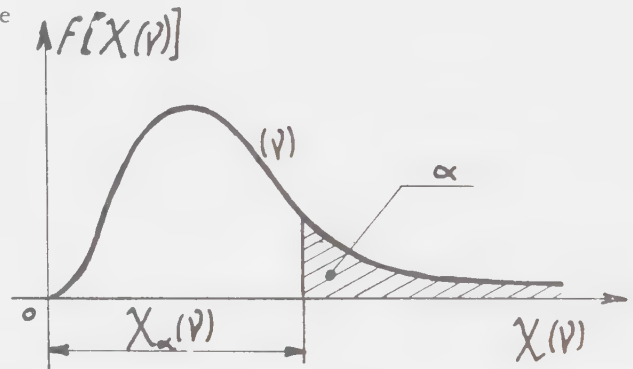
La probabilité α correspond à l'aire hachurée sur la figure ci-contre.

Pour $\nu \geq 30$, on peut admettre que la variable : $\sqrt{2 \chi^2} - \sqrt{2 \nu - 1}$

est une variable normale réduite, et utiliser en conséquence la table II pour calculer les valeurs correspondantes de χ_{α}^2

On trouve en particulier, que :

$$\begin{cases} \chi_{0,975}^2 = \nu + 1,4208 - 1,96 \sqrt{2 \nu - 1} \\ \chi_{0,95}^2 = \nu + 0,8530 - 1,645 \sqrt{2 \nu - 1} \\ \chi_{0,05}^2 = \nu + 0,8530 + 1,645 \sqrt{2 \nu - 1} \\ \chi_{0,025}^2 = \nu + 1,4208 + 1,96 \sqrt{2 \nu - 1} \end{cases}$$



REMARQUE : La table de χ^2 permet de calculer la somme des premiers termes d'une distribution de Poisson, car on a :

$$\sum_{x=0}^{k} e^{-m} \frac{m^x}{x!} = e^{-m} \left\{ 1 + \frac{m}{1} + \frac{m^2}{2!} + \dots + \frac{m^k}{k!} \right\} = \alpha$$

lorsque : $m = \frac{1}{2} \chi_{\alpha}^2 (2k + 2)$

EXEMPLE : $k = 2$ $\alpha = 0,9$ $\chi_{0,9}^2 (6) = 2,204$

$$m = 1,102$$

$$\alpha = 0,90 = e^{-1,102} \left\{ 1 + 1,102 + \frac{1,102^2}{2} \right\}$$

TABLE III
DISTRIBUTION DE χ^2

χ^2	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,0157	0,0262	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,210	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341	16,268
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,589	7,779	9,488	11,668	13,277	18,465
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,517
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	2,038	2,532	3,323	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,909	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	9,542	10,680	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,259	48,268
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,568	41,638	49,724
24	10,856	11,992	13,818	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,632	41,566	44,314	52,620
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	13,565	14,848	16,928	18,939	21,593	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,893	49,588	58,303
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

TABLE IV
LOI DE STUDENT

La table indique, pour différentes valeurs du nombre de degrés de liberté ν , les écarts $t_\alpha(\nu)$ pour lesquels il existe une probabilité α pour que la variable $t(\nu)$ soit extérieure à l'intervalle $(-t_\alpha(\nu), +t_\alpha(\nu))$:

$$P \left\{ |t(\nu)| > t_\alpha(\nu) \right\} = \alpha$$

La probabilité α correspond à la somme des 2 aires hachurées sur le diagramme ci-contre.

Pour $\nu = \infty$ la variable $t(\infty)$ est distribuée suivant la loi normale réduite.

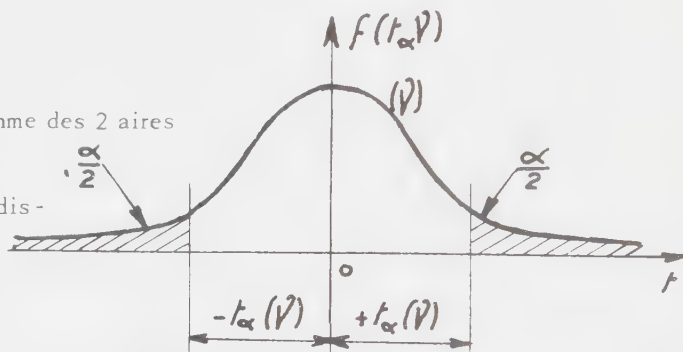


TABLE IV
LOI DE STUDENT
Valeur de $t_\alpha(\nu)$

α	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,110	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,335	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

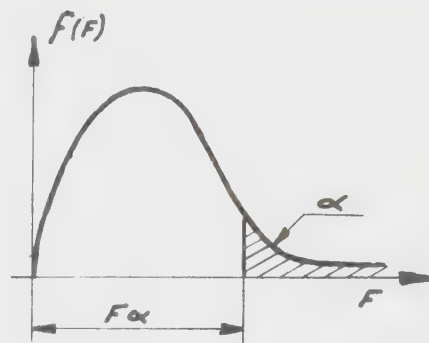
TABLE V
LOI DE FISHER SNEDECOR

Ces tables indiquent, les valeurs $F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2)$ pour lesquelles il existe une probabilité α pour que le rapport $F(\nu_1, \nu_2)$ soit supérieur à : $F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2)$

$$P \left\{ F(\nu_1, \nu_2) \geq F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2) \right\} = \alpha$$

En tête de chaque table figure la valeur particulière de α qui lui correspond. La probabilité α correspond à l'aire hachurée sur le diagramme ci-contre.

Le rapport $F(\nu_1, \nu_2)$ est le rapport $F(\nu_1, \nu_2) = \frac{\frac{\nu_1}{\sigma_1^2}}{\frac{\nu_2}{\sigma_2^2}}$



de deux estimations statistiquement indépendantes ν_1 et ν_2 des variances théoriques σ_1^2 et σ_2^2 (qui peuvent d'ailleurs

être égales, $\sigma_1 = \sigma_2$) de deux populations normales. ν_1 est égal au nombre de degrés de liberté correspondant à l'estimation ν_1 figurant au **numérateur**, ν_2 est égal au nombre de degrés de liberté correspondant à l'estimation ν_2 figurant au **dénominateur**.

Ces mêmes tables permettent de calculer les valeurs $F_{0,80}$, $F_{0,90}$, $F_{0,95}$, $F_{0,99}$, $F_{0,999}$ en utilisant la relation :

$$F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)}$$

EXEMPLE : Soit à calculer $F_{0,95}(2,5)$.

On cherche sur les tables la valeur : $F_{0,05}(5,2) = 19,30$

$$\text{d'où : } F_{0,95}(2,5) = \frac{1}{F_{0,05}(5,2)} = \frac{1}{19,30} = 0,0518$$

REMARQUE 1 : Les relations suivantes relient les variables :

$$\begin{cases} F_{\alpha}(\nu_1, \infty) = \frac{1}{\nu_1} \chi_{\alpha}^2(\nu_1) \\ F_{\alpha}(\infty, \nu_2) = \frac{\nu_2}{\chi_{1-\alpha}^2(\nu_2)} \end{cases}$$

$$F(1, \nu_2) = t_{\alpha}^2(\nu_2) \quad t_{\alpha} \text{ étant une variable de Student (Table IV)}$$

REMARQUE 2 : La table de Snedecor permet de calculer la somme des premiers termes d'une distribution binomiale $(p + q)^N$. On a, en effet .

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = q^N + N q^{N-1} p + \frac{N(N-1)}{2} q^{N-2} p^2 + \dots + C_N^{k_1-1} q^{N-k_1+1} p^{k_1-1} \\ 1 - \alpha = p^N + N p^{N-1} q + \frac{N(N-1)}{2} p^{N-2} q^2 + \dots + C_N^{k_2-1} p^{N-k_2+1} q^{k_2-1} \end{array} \right.$$

sous réserve que : $N = k_1 + k_2 - 1$

$$\frac{p}{q} = \frac{k_1}{k_2} F_{\alpha}(2k_1, 2k_2)$$

EXEMPLE .

$$k_1 = 1 \quad k_2 = 2 \quad N = 1 + 2 - 1 = 2$$

$$p = 0,552785 \quad q = \sqrt{0,20} = 0,447215$$

$$\text{On a : } (q + p)^2 = \underbrace{q^2}_{\alpha=0,20} + \underbrace{2pq + p^2}_{1-\alpha=0,80}$$

$$(0,447215 + 0,552785)^2 = \underbrace{0,20}_{\alpha=0,20} + \underbrace{0,49442 + 0,30558}_{1-\alpha=0,80}$$

$$F_{0,20}(2,4) = \frac{k_2}{k_1} \frac{p}{q} = 2 \times \frac{0,552785}{0,447215} = 2,47212$$

La table V donne : $F_{0,20}(2,4) = 2,47$

TABLE V
LOI DE FISHER SNEDECOR
 $\alpha = 0,20$

$\frac{v_2}{v_1}$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	9,47	12,00	13,06	13,73	14,01	14,26	14,59	14,90	15,24	15,58
2	3,56	4,00	4,16	4,24	4,28	4,32	4,36	4,40	4,44	4,48
3	2,68	2,89	2,94	2,96	2,97	2,97	2,98	2,98	2,98	2,98
4	2,35	2,47	2,48	2,48	2,48	2,47	2,47	2,46	2,44	2,43
5	2,18	2,26	2,25	2,24	2,23	2,22	2,20	2,18	2,16	2,13
6	2,07	2,13	2,11	2,09	2,08	2,06	2,04	2,02	1,99	1,95
7	2,00	2,04	2,02	1,99	1,97	1,96	1,93	1,91	1,87	1,83
8	1,95	1,98	1,95	1,92	1,90	1,88	1,86	1,83	1,79	1,74
9	1,91	1,94	1,90	1,87	1,85	1,83	1,80	1,76	1,72	1,67
10	1,88	1,90	1,86	1,83	1,80	1,78	1,75	1,72	1,67	1,62
11	1,86	1,87	1,83	1,80	1,77	1,75	1,72	1,68	1,63	1,57
12	1,84	1,85	1,80	1,77	1,74	1,72	1,69	1,65	1,60	1,54
13	1,82	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66	1,62	1,57	1,51
14	1,81	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60	1,55	1,48
15	1,80	1,79	1,75	1,71	1,68	1,66	1,62	1,58	1,53	1,46
16	1,79	1,78	1,74	1,70	1,67	1,64	1,61	1,56	1,51	1,43
17	1,78	1,77	1,72	1,68	1,65	1,63	1,59	1,55	1,49	1,42
18	1,77	1,76	1,71	1,67	1,64	1,62	1,58	1,53	1,48	1,40
19	1,76	1,75	1,70	1,66	1,63	1,61	1,57	1,52	1,46	1,39
20	1,76	1,75	1,70	1,65	1,62	1,60	1,56	1,51	1,45	1,37
21	1,75	1,74	1,69	1,65	1,61	1,59	1,55	1,50	1,44	1,36
22	1,75	1,73	1,68	1,64	1,61	1,58	1,54	1,49	1,43	1,35
23	1,74	1,73	1,68	1,63	1,60	1,57	1,53	1,49	1,42	1,34
24	1,74	1,72	1,67	1,63	1,59	1,57	1,53	1,48	1,42	1,33
25	1,73	1,72	1,66	1,62	1,59	1,56	1,52	1,47	1,41	1,32
26	1,73	1,71	1,66	1,62	1,58	1,56	1,52	1,47	1,40	1,31
27	1,73	1,71	1,66	1,61	1,58	1,55	1,51	1,46	1,40	1,30
28	1,72	1,71	1,65	1,61	1,57	1,55	1,51	1,46	1,39	1,30
29	1,72	1,70	1,65	1,60	1,57	1,54	1,50	1,45	1,39	1,29
30	1,72	1,70	1,64	1,60	1,57	1,54	1,50	1,45	1,38	1,28
40	1,70	1,68	1,62	1,57	1,54	1,51	1,47	1,41	1,34	1,24
60	1,68	1,65	1,59	1,55	1,51	1,48	1,44	1,38	1,31	1,18
120	1,66	1,63	1,57	1,52	1,48	1,45	1,41	1,35	1,27	1,12
∞	1,64	1,61	1,55	1,50	1,46	1,43	1,39	1,32	1,23	1,00

TABLE V
LOI DE FISHER SNEDECOR
 $\alpha = 0,10$

$\frac{V_2}{V_1}$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	59,44	60,70	62,00	63,33
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,37	9,41	9,45	9,49
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,25	5,22	5,18	5,13
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,95	3,90	3,83	3,76
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,34	3,27	3,19	3,10
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	2,98	2,90	2,82	2,72
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,75	2,67	2,58	2,47
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,59	2,50	2,40	2,29
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,47	2,38	2,28	2,16
10	3,28	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,38	2,28	2,18	2,06
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,30	2,21	2,10	1,97
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,24	2,15	2,04	1,90
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,20	2,10	1,98	1,85
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,15	2,05	1,94	1,80
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,12	2,02	1,90	1,76
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,09	1,99	1,87	1,72
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,06	1,96	1,84	1,69
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,04	1,93	1,81	1,66
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,02	1,91	1,79	1,63
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,00	1,89	1,77	1,61
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	1,98	1,88	1,75	1,59
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	1,97	1,86	1,73	1,57
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,95	1,84	1,72	1,55
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,94	1,83	1,70	1,53
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,93	1,82	1,69	1,52
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,92	1,81	1,68	1,50
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,91	1,80	1,67	1,49
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,90	1,79	1,66	1,48
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,89	1,78	1,65	1,47
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,88	1,77	1,64	1,46
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,83	1,71	1,57	1,38
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,77	1,66	1,51	1,29
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,72	1,60	1,45	1,19
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,67	1,55	1,38	1,00

TABLE V
LOI DE FISHER SNEDECOR
 $\alpha = 0,05$

$\frac{v_1}{v_2}$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,03	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

TABLE V

LOI DE FISHER SNEDECOR
 $\alpha = 0,01$

$\frac{v_1}{v_2}$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,46	99,50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,03	26,60	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	13,93	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,27	9,89	9,47	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,73	8,47	8,10	7,72	7,31	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,07	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,28	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,73	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,33	3,91
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,02	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,78	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,30	3,96	3,59	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,43	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,29	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,18	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,08	2,65
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,00	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	2,92	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	2,86	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,80	2,36
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,75	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,70	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,66	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,62	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,58	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,55	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,23	2,90	2,52	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,49	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,47	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,29	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,12	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,66	2,34	1,95	1,38
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,79	1,00

TABLE V

LOI DE FISHER SNEDECOR
 $\alpha = 0,001$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	405284	500000	540379	562500	576405	585937	596144	610667	623497	636619
2	998,5	999,0	999,2	999,2	999,3	999,3	999,4	999,4	999,5	999,5
3	167,5	148,5	141,1	137,1	134,6	132,8	130,6	128,3	125,9	123,5
4	74,14	61,25	56,18	53,44	51,71	50,33	49,00	47,41	45,77	44,05
5	47,04	36,61	33,20	31,09	29,75	28,84	27,64	26,42	25,14	23,78
6	35,51	27,00	23,70	21,90	20,81	20,03	19,03	17,99	16,89	15,75
7	29,22	21,69	18,77	17,19	16,21	15,52	14,63	13,71	12,73	11,69
8	25,42	18,49	15,83	14,39	13,49	12,86	12,04	11,19	10,30	9,34
9	22,86	16,39	13,90	12,56	11,71	11,13	10,37	9,57	8,72	7,81
10	21,04	14,91	12,55	11,28	10,48	9,92	9,20	8,45	7,64	6,76
11	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,35	7,63	6,85	6,00
12	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	8,38	7,71	7,00	6,25	5,42
13	17,81	12,31	10,21	9,07	8,35	7,86	7,21	6,52	5,78	4,97
14	17,14	11,78	9,73	8,62	7,92	7,43	6,80	6,13	5,41	4,60
15	16,59	11,34	9,34	8,25	7,57	7,09	6,47	5,81	5,10	4,31
16	16,12	10,97	9,00	7,94	7,27	6,81	6,19	5,55	4,85	4,06
17	15,72	10,66	8,73	7,68	7,02	6,56	5,96	5,32	4,63	3,85
18	15,38	10,39	8,49	7,46	6,81	6,35	5,76	5,13	4,45	3,67
19	15,08	10,16	8,28	7,26	6,61	6,18	5,59	4,97	4,29	3,52
20	14,82	9,95	8,10	7,10	6,46	6,02	5,44	4,82	4,15	3,38
21	14,59	9,77	7,94	6,95	6,32	5,88	5,31	4,70	4,03	3,26
22	14,38	9,61	7,80	6,81	6,19	5,76	5,19	4,58	3,92	3,15
23	14,19	9,47	7,67	6,69	6,08	5,65	5,09	4,48	3,82	3,05
24	14,03	9,34	7,55	6,59	5,98	5,55	4,99	4,39	3,74	2,97
25	13,88	9,22	7,45	6,49	5,88	5,46	4,91	4,31	3,66	2,89
26	13,74	9,12	7,36	6,41	5,80	5,38	4,83	4,24	3,59	2,82
27	13,61	9,02	7,27	6,33	5,73	5,31	4,76	4,17	3,52	2,75
28	13,50	8,93	7,19	6,25	5,66	5,24	4,69	4,11	3,46	2,70
29	13,39	8,85	7,12	6,19	5,59	5,18	4,64	4,05	3,41	2,64
30	13,29	8,77	7,05	6,12	5,53	5,12	4,58	4,00	3,36	2,59
40	12,61	8,25	6,60	5,70	5,13	4,73	4,21	3,64	3,01	2,23
60	11,97	7,76	6,17	5,31	4,76	4,37	3,87	3,31	2,69	1,90
120	11,38	7,31	5,79	4,95	4,42	4,04	3,55	3,02	2,40	1,56
∞	10,83	6,91	5,42	4,62	4,10	3,74	3,27	2,74	2,13	1,00

TABLE VII

TEST DE COCHRAN

Lorsque l'on doit comparer les variabilités de plusieurs machines outils, de différents procédés de fabrication ou d'une manière générale de groupe d'objets, on peut prélever dans chaque groupe un échantillon de n pièces, et calculer pour chaque échantillon les estimations : $s_1^2 \quad s_2^2 \quad \dots \quad s_k^2$

des variances correspondantes :

$$s_1^2 = \frac{\sum_i (x_{1i} - x_1)^2}{n - 1}$$

Si l'une de ces estimations dépasse, d'une manière notable la valeur moyenne de tous les autres, on peut se demander si la variance du groupe correspondant est systématiquement plus grande que celle des autres groupes.

Le test de Cochran permet de calculer la probabilité pour que le rapport de la plus grande des variances observées à leur somme totale dépasse une valeur donnée, dans l'hypothèse où tous les groupes d'objets auraient la même variance théorique.

Soit g ce rapport :

$$g = \frac{\text{Plus grande des valeurs } s_1^2}{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_k^2}$$

$$P \left\{ g > g_{\alpha}(k, \nu) \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 \right\} = \alpha$$

$\nu = n - 1$

La table VII donne les valeurs de $g_{\alpha}(k, \nu)$ pour $\alpha = 0,05$

On ne pourra conclure, avec un risque de 1ère espèce de 5%, que la variance du groupe correspondant à la plus grande des estimations s_i^2 est systématiquement supérieure à la variance des autres groupes que dans le cas où :

$$g > g_{0.05}(k, \nu)$$

TABLE VII
TEST DE COCHRAN
 $\alpha = 0,05$

[illegible]

Run	Time, sec	Temperature, °C	Pressure, mm Hg	Flow rate, ml/min	Concentration, g/100 ml	Viscosity, cP	Reduced viscosity
1	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
2	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
3	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
4	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
5	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
6	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
7	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
8	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
9	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
10	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
11	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
12	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
13	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
14	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
15	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
16	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
17	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
18	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
19	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
20	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
21	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
22	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
23	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
24	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
25	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
26	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
27	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
28	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
29	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
30	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
31	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
32	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
33	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
34	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
35	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
36	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
37	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
38	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
39	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
40	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
41	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
42	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
43	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
44	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
45	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
46	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
47	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
48	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
49	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
50	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
51	10	100	10	1.0	0.5	0.15	0.30
52							

LOI DE POISSON

Lorsqu'on prélève, au hasard, un échantillon de n pièces dans une population contenant une proportion p de pièces défectueuses, on peut admettre, avec une très bonne approximation, que la probabilité pour que cet échantillon contienne un nombre x de pièces défectueuses exactement à c est donnée par la formule :

$$(1) \quad P \left\{ x = c \mid n, p \right\} = e^{-\nu} \frac{\nu^c}{c!} \quad (\text{Loi de Poisson})$$

expression dans laquelle le facteur r a pour valeur : $r = n p$

La formule précédente n'est applicable qu'à la condition que la proportion p de pièces détectueuses soit inférieure à 0,10 et que l'effectif n de l'échantillon soit inférieur au dixième de l'effectif N de la population.

$$\begin{cases} P = 0,10 \\ \frac{n}{N} = 0,10 \end{cases}$$

Dans les mêmes conditions, la probabilité pour que l'échantillon prélevé contienne un nombre x de pièces défectueuses inférieur ou égal à c est donné par la fonction de probabilité totale de la loi de Poisson.

$$(2) \quad P \left\{ x \leq c \mid n, p \right\} = \sum_{x=0}^c e^{-1/p} \frac{(1/p)^x}{x!}$$

La table IX donne les valeurs des probabilités (1) pour différentes valeurs de ν comprises entre 0,1 et 11.

L'abaque IX permet de déterminer les probabilités totales (2) pour des valeurs de ν comprises entre 0,1 et 30.

$c \backslash x$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	$x \backslash c$
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606529	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879	1
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	2
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,026388	0,032343	0,037938	0,043113	3
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000713	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669	0,011115	0,015528	4
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000696	0,001227	0,002001	0,003066	5
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	6
7				0,000001	0,000003	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073		7
8						0,000001	0,000002	0,000004	0,000009		8
9									0,000001		9

TABLE IX

$\frac{v}{c}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\frac{v}{c}$
0	0,135335	0,049787	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123	0,000045	0,000017	0
1	0,270671	0,149361	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111	0,000454	0,000184	1
2	0,270671	0,224042	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998	0,002270	0,001010	2
3	0,180447	0,224042	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994	0,007567	0,003705	3
4	0,090224	0,168031	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057253	0,033737	0,018917	0,010189	4
5	0,036089	0,100819	0,156293	0,175457	0,160623	0,127717	0,091604	0,069727	0,037833	0,022415	5
6	0,012030	0,050409	0,104196	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090	0,063055	0,041095	6
7	0,003437	0,021604	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116	0,090079	0,064577	7
8	0,000359	0,008102	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,121756	0,112599	0,088794	8
9	0,000191	0,002701	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756	0,125110	0,106526	9
10	0,000038	0,000810	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580	0,125110	0,119378	10
11	0,000007	0,000221	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020	0,113736	0,119378	11
12	0,000001	0,000055	0,000642	0,003434	0,011264	0,026350	0,048127	0,072765	0,094790	0,109430	12
13	0,000013	0,000013	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376	0,072908	0,092595	13
14	0,000003	0,000003	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384	0,052077	0,072753	14
15	0,000001	0,000001	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431	0,034718	0,053352	15
16	0,000001	0,000001	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930	0,021699	0,036680	16
17	0,000001	0,000001	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786	0,012764	0,023734	17
18	0,000004	0,000004	0,000004	0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893	0,007091	0,014504	18
19	0,000001	0,000001	0,000001	0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370	0,003732	0,008397	19
20					0,000004	0,000030	0,000159	0,000617	0,001866	0,004618	20
21					0,000001	0,000010	0,000061	0,000264	0,000889	0,002419	21
22						0,000003	0,000022	0,000108	0,000404	0,001210	22
23						0,000001	0,000008	0,000042	0,000176	0,000578	23
24							0,000003	0,000016	0,000073	0,000265	24
25							0,000001	0,000006	0,000029	0,000117	25
26								0,000002	0,000011	0,000049	26
27								0,000001	0,000004	0,000020	27
28								0,000001	0,000001	0,000008	28
29								0,000001	0,000001	0,000003	29
30									0,000001	0,000001	30

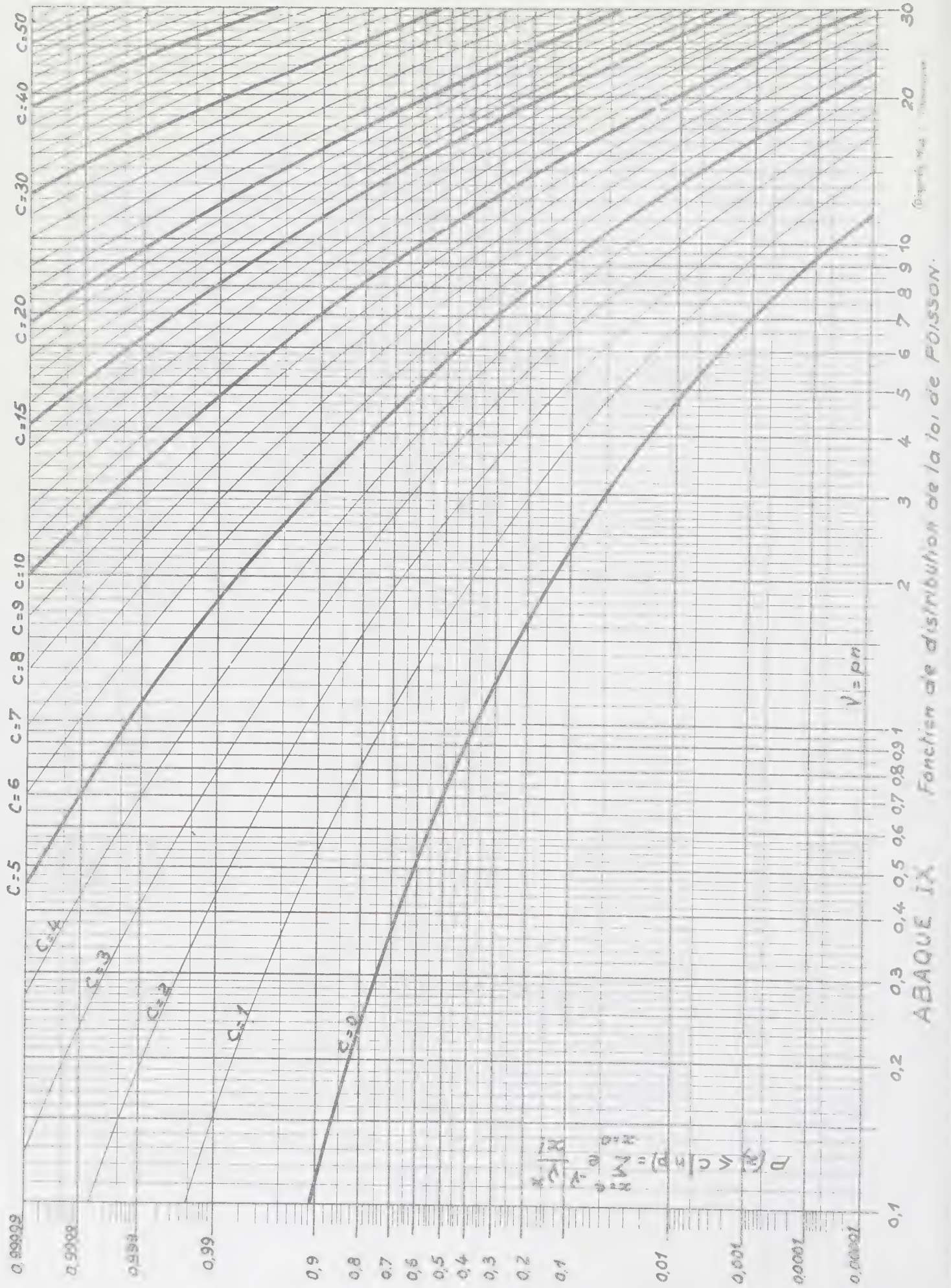


TABLE X

LIMITES DE CONFIANCE CORRESPONDANT A L'ESTIMATION
DE LA PROPORTION DE PIÈCES DÉFECTUEUSES D'UN LOT

Pour obtenir une estimation de la proportion p de pièces défectueuses contenues dans un lot, on prélève un échantillon de n pièces et l'on détermine le nombre a de pièces défectueuses contenues dans l'échantillon prélevé. On peut adopter comme estimation du paramètre p , la fréquence :

$$f = \frac{a}{n}$$

des pièces défectueuses de l'échantillon.

Lorsque l'effectif n de l'échantillon est faible par rapport à l'effectif N du lot ($n \leq \frac{1}{10} N$), la table X permet de calculer les limites de confiance entre lesquelles on peut admettre que se trouve la valeur inconnue p caractérisant le lot étudié.

La table X donne les valeurs des limites de confiance inférieure et supérieure du produit $p \times n$, en fonction du nombre a (colonne 1) de pièces défectueuses contenues dans l'échantillon et de l'effectif n (colonne 2) ou, ce qui est équivalent, de la fréquence observée $f = \frac{a}{n}$ (colonne 3).

Une interpolation linéaire⁽¹⁾ par rapport à la fréquence observée $f = \frac{a}{n}$ permet d'obtenir les limites de confiance du produit $p n$ pour les valeurs non tabulées de la fréquence f .

Le seuil de confiance α , correspondant à l'intervalle ainsi déterminé, est lié aux valeurs choisies pour les probabilités β_1 et β_2 figurant en tête des colonnes de la table X par la relation :

$$\alpha \geq 1 - (\beta_1 + \beta_2)$$

Lorsque $a > \frac{1}{2} n$, on calculera les limites de confiance du paramètre $q = 1 - p$ en entrant dans la table à l'aide de la variable $b = n - a$.

Les limites de confiance correspondant à une distribution de Poisson, sont obtenues directement en prenant $f = 0$.

Pour les valeurs de $a > 14$, on calculera les limites de confiance en admettant que la variable f suit une distribution normale d'espérance mathématique p et d'écart-type $\sqrt{\frac{pq}{n}}$

Ainsi, pour un seuil de confiance de 0,95, on obtiendra les valeurs des limites de confiance en résolvant l'inégalité :

$$(f - p)^2 \leq 1,96^2 \times \frac{p(1-p)}{n}$$

ou encore, d'une manière moins précise, en utilisant l'inégalité :

$$f - 1,96 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} < p < f + 1,96 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

On adoptera les limites 0 ou 1 si l'une de ces valeurs est inférieure à 0 ou supérieur à 1.

EXEMPLE 1 : On prélève dans un lot de 1 000 pièces, un échantillon de 24 pièces qui contient 6 pièces défectueuses. Quelle est la proportion maximum de pièces défectueuses que peut contenir le lot ?

Si on effectue le calcul en admettant de se tromper au plus dans 2,5 cas sur 100, ($\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 0,025$) la table X indique pour $a = 6$, $\beta_1 = 0,025$:

(1) - Pour $a = 0$ l'interpolation doit être faite par rapport à l'argument $\frac{1}{n}$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = 0,3 \\ f = 0,2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} n p = 10,9 \\ n p = 11,6 \end{array}$$

d'où pour :

$$f = \frac{a}{n} = \frac{6}{24} = 0,25 \quad n p = \frac{1}{2} (10,9 + 11,6) = 11,25$$

soit :

$$p < \frac{11,25}{24} = 0,469$$

En choisissant les valeurs $\beta_1 = 0,025$ $\beta_2 = 0,025$ $\alpha \gg 0,95$ la table X indique : pour $a = 6$, $\beta_1 = 0,025$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f = 0,3 \\ f = 0,25 \\ f = 0,2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} n p = 2,38 \\ n p = 2,345 \text{ (par interpolation).} \\ n p = 2,31 \end{array}$$

d'où

$$p > \frac{2,345}{24} = 0,0978$$

On peut en conclure que dans au moins 95 cas sur 100, la valeur exacte p est comprise dans l'intervalle de confiance

$$0,0978 < p < 0,469$$

EXEMPLE 2 : CONTROLE SUR PRELEVEMENT.

Pour contrôler la qualité des marchandises qui lui sont livrées, un industriel décide de prélever au hasard dans chaque lot un échantillon de 20 pièces et d'accepter tout lot pour lequel l'échantillon ne contient pas plus de 1 pièce défectueuse. Quelle est la protection assurée par un tel contrôle ?

La table X indique immédiatement :

1°) que pour $n p = 0,247$ c'est-à-dire $p = \frac{0,247}{20} = 0,01235$

2,5 échantillons sur 100 contiendront au minimum 2 pièces défectueuses et que, par suite, 97,5% des lots de qualité $p = 0,01235$ seront acceptés.

2°) que pour $n p = 4,97$ soit $p = \frac{4,97}{20} = 0,2485$

2,5 échantillons sur 100 contiendront au maximum 1 pièce défectueuse et que, par suite 97,5% des lots de qualité $p = 0,2425$ seront refusés.

On peut ainsi tracer la courbe caractéristique d'efficacité du plan de contrôle utilisé.

TABLE X

LIMITES DE CONFIANCE DU PRODUIT $n \times p$

Nombre de pièces défectueuses a	Effectif de l'échantillon n	Fréquence observée $f = \frac{a}{n}$	Limite inférieure de confiance $\beta_1 = P\{x \geq a n p\}$			Limite supérieure de confiance $\beta_2 = P\{x \leq a n p\}$		
			$\beta_1 = 0,005$ $\beta_1 = 0,025$ $\beta_1 = 0,10$			$\beta_2 = 0,10$ $\beta_2 = 0,025$ $\beta_2 = 0,005$		
			Pour $a=0$ interpolier par rapport $\frac{f}{a}$					
0	5	$1/n = 0,2$	0			1,84	2,61	3,27
		$1/n = 0,15$				1,95	2,83	3,66
	10	$1/n = 0,10$				2,06	3,09	4,11
	20	$1/n = 0,05$				2,17	3,37	4,65
1	∞	$1/n = 0,00$				2,30	3,69	5,30
	2	0,50	0,005	0,025	0,103	1,90	1,97	1,99
	3		0,005	0,025	0,104	2,41	2,72	2,88
	4	0,25	0,005	0,025	0,104	2,72	3,22	3,56
	5	0,20	0,005	0,025	0,104	2,92	3,58	4,07
		0,15	0,005	0,025	0,105	3,14	3,99	4,69
	10	0,10	0,005	0,025	0,105	3,37	4,45	5,44
	20	0,05	0,005	0,025	0,105	3,62	4,97	6,34
2	∞	0,00	0,005	0,025	0,105	3,89	5,57	7,43
	4	0,50	0,118	0,270	0,570	3,43	3,73	3,88
	5	0,40	0,114	0,264	0,561	3,77	4,27	4,59
	6		0,112	0,260	0,556	4,00	4,67	5,14
	7		0,011	0,257	0,552	4,17	4,97	5,54
	8	0,25	0,110	0,255	0,549	4,31	5,21	5,94
	10	0,20	0,108	0,252	0,545	4,50	5,56	6,48
		0,15	0,107	0,249	0,542	4,69	5,94	7,09
3	20	0,10	0,106	0,247	0,538	4,90	6,34	7,74
	40	0,05	0,105	0,245	0,535	5,11	6,77	8,44
	∞	0,00	0,103	0,242	0,532	5,32	7,22	9,27
	6	0,50	0,398	0,709	1,21	4,79	5,29	5,60
	7		0,387	0,693	1,19	5,05	5,71	6,18
	8		0,380	0,682	1,17	5,24	6,04	6,64
	9		0,374	0,674	1,17	5,39	6,31	7,03
	10	0,03	0,370	0,667	1,16	5,52	6,52	7,35
4	15	0,20	0,358	0,650	1,14	5,89	7,21	8,41
	30	0,10	0,348	0,634	1,12	6,28	7,96	9,61
	∞	0,00	0,338	0,619	1,10	6,68	8,77	11,00
	8	0,50	0,799	1,26	1,92	6,08	6,74	7,20
	10	0,40	0,768	1,22	1,88	6,46	7,38	8,09
		0,30	0,741	1,18	1,84	6,83	8,04	9,06
	20	0,20	0,716	1,15	1,80	7,21	8,73	10,1
	40	0,10	0,694	1,12	1,77	7,60	9,47	11,3
5	∞	0,00	0,672	1,09	1,74	7,99	10,2	12,6
	10	0,50	1,28	1,87	2,67	7,33	8,13	8,72
		0,40	1,23	1,81	2,61	7,72	8,79	9,66
		0,30	1,19	1,76	2,56	8,10	9,47	10,7
	25	0,20	1,15	1,71	2,52	8,49	10,2	11,7
	50	0,10	1,11	1,66	2,47	8,88	10,9	12,9
6	∞	0,00	1,08	1,62	2,43	9,27	11,7	14,1
	12	0,50	1,83	2,53	3,46	0,54	9,47	10,2
	15	0,40	1,75	2,45	3,38	8,95	10,2	11,2
	20	0,30	1,69	2,38	3,32	9,35	10,9	12,2
	30	0,20	1,63	2,31	3,26	9,74	11,6	13,3
	60	0,10	1,58	2,26	3,20	10,1	12,3	14,4
	∞	0,00	1,54	2,20	3,15	10,5	13,1	15,7

TABLE X

LIMITES DE CONFIANCE DU PRODUIT $n \ln p$

Nombre de pièces défectueuses a	Effectif de l'échantillon n	Fréquence observée $f = \frac{a}{n}$	Limite inférieure de confiance $\beta_1 = P\{x \geq a \ln p\}$			Limite supérieure de confiance $\beta_2 = P\{x \leq a \ln p\}$		
			$\beta_1 = 0,005$	$\beta_1 = 0,025$	$\beta_1 = 0,10$	$\beta_2 = 0,10$	$\beta_2 = 0,025$	$\beta_2 = 0,005$
7	14	0,5	2,41	3,23	4,26	9,74	10,8	11,6
		0,4	2,32	3,12	4,17	10,1	11,5	12,6
		0,3	2,24	3,03	4,09	10,6	12,2	13,7
	35	0,2	2,16	2,95	4,02	11,0	12,9	14,8
		0,1	2,10	2,88	3,96	11,4	13,7	15,9
		0,0	2,04	2,81	3,89	11,8	14,4	17,1
8	16	0,5	3,04	3,94	5,09	10,9	12,1	13,0
		0,4	2,92	3,82	4,98	11,3	12,8	14,0
		0,3	2,82	3,72	4,89	11,8	13,5	15,1
	40	0,2	2,73	3,62	4,80	12,2	14,3	16,2
		0,1	2,65	3,53	4,73	12,6	15,0	17,4
		0,0	2,57	3,45	4,66	13,0	15,8	18,6
9	18	0,5	3,68	4,68	5,92	12,1	13,3	14,3
		0,4	3,55	4,54	5,80	12,5	14,1	15,4
		0,3	3,43	4,42	5,70	13,0	14,8	16,5
	45	0,2	3,32	4,31	5,60	13,4	15,6	17,6
		0,1	3,22	4,21	5,51	13,8	16,3	18,8
		0,0	3,13	4,12	5,43	14,2	17,1	20,0
10	20	0,5	4,35	5,44	6,76	13,2	14,6	15,6
		0,4	4,20	5,28	6,63	13,7	15,3	16,8
		0,3	4,06	5,14	6,51	14,1	16,1	17,9
	50	0,2	3,93	5,02	6,41	14,6	16,9	19,0
		0,1	3,82	4,90	6,31	15,0	17,6	20,2
		0,0	3,72	4,80	6,22	15,4	18,4	21,4
11	22	0,5	5,04	6,21	7,62	14,4	15,8	17,0
		0,4	4,87	6,03	7,47	14,8	16,6	18,1
		0,3	4,71	5,88	7,34	15,3	17,4	19,2
	55	0,2	4,57	5,74	7,23	15,7	18,1	20,4
		0,1	4,44	5,61	7,12	16,2	18,9	21,6
		0,0	4,32	5,49	7,02	16,6	19,7	22,8
12	24	0,5	5,75	6,99	8,48	15,5	17,0	18,2
		0,4	5,55	6,80	8,32	16,0	17,8	19,4
		0,3	5,37	6,63	8,18	16,5	18,6	20,6
	60	0,2	5,22	6,47	8,05	16,9	19,4	21,7
		0,1	5,07	6,33	7,94	17,3	20,2	22,9
		0,0	4,94	6,20	7,83	17,8	21,0	24,1
13	26	0,5	6,47	7,78	9,34	16,7	18,2	19,5
		0,4	6,25	7,57	9,17	17,1	19,0	20,7
		0,3	6,06	7,38	9,02	17,6	19,8	21,9
	65	0,2	5,88	7,22	8,89	18,1	20,6	23,1
		0,1	5,72	7,06	8,76	18,5	21,4	24,3
		0,0	5,58	6,92	8,65	19,0	22,2	25,5
14	28	0,5	7,20	8,58	10,2	17,8	19,4	20,8
		0,4	6,96	8,36	10,0	18,3	20,3	22,0
		0,3	6,75	8,15	9,87	18,8	21,1	23,2
	70	0,2	6,56	7,97	9,73	19,2	21,9	24,4
		0,1	6,39	7,81	9,59	19,7	22,7	25,6
		0,0	6,23	7,65	9,47	20,1	23,5	26,8

QUELQUES PROGRAMMES DE TRAITEMENTS

Les programmes que nous donnons ici sont

LOIS RHEOLOGIQUES :

Programme I constitution du fichierProgramme II corrélation de 2 variables

calcul de N , $\bar{X}$, $\bar{Y}$, σ_x , σ_y , cov , ρ
 tracé en variables centrées réduites du nuage, de
 l'indicatrice, des droites de moindres carrés.

Programme III granulométrie

calcul de $\bar{X}$, σ_x , C_c , U , F .
 tracé de la courbe granulométrique, de la courbe
 de distribution.

Programme IV consolidation

calcul de C_c , $\sigma_w = w_L$, $\sigma_w = w_P$.
 tracé dans les axes L , $\sigma_w = w_P$ (I_L , $\log \sigma$) de la
 courbe de charge, de la tangente au point ($\sigma = 10 \text{ bar}$)

ZONES HOMOGENES

Liste des programmes de Cartographie.Programme V COCUR : coupes curvilignes

tracé des logs de sondages par lignes du réseau avec
 indication de la nature des sols.

Programme I

```

// JOB
*STOREDATA  WS  UA  LABOR 0004
// FOR
*IOCS (CARD,1132 PRINTER,DISK)
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
    INTEGER SO,REP1,REP2,GAMAD,W,G,PROCT,PHI,C,E1,E2,E3,T
    DIMENSION NY(9)
    DEFINE FILE 2(26,40,U,I2)
    I2 = 1
    N=0
    DO 1 I = 1,26
        READ(2,100)SO,MA,REP1,REP2,NC,NPPR,GAMAD,W,G,M1,M2,M3,M4,M5,M6,M7,
        *M8,M9,PROCT,MAL,MAP,MI1,MI2
100  FORMAT(5A2,I4,3I3,9I4,I5,2I4,2I3)
        READ(2,200)NA,PHI,C,E1,E2,E3,NY,K,T,INT
200  FORMAT(I1,I4,5I5,9I4,I5,I3)
        IF (PROCT)3,2,3
    2  N = N+1
        MI2=MI2*10+NA
        WRITE(2,I2)SO,MA,REP1,REP2,NC,NPPR,GAMAD,W,G,M1,M2,M3,M4,M5,M6,M7,
        *M8,M9,PROCT,MAL,MAP,MI1,MI2,  PHI,C,E1,E2,E3,NY,K,T,INT
    1  CONTINUE
    3  WRITE(3,101)N
101  FORMAT(10X,4HN = ,I3)
        CALL EXIT
    END
// XEQ          1
*FILES(2,LABOR)

```

Programme 2

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*IOCS(CARD,1132PRINTER,DISK,PLOTTER)
*ONE WORD INTEGERS
  INTEGER UC,P,GAMAD,W,G,PDS3,PDS2,PDS1,LL,LPR,PROC,A,PHI,C,E1,E2,E3
  1,021,03,04,05,06,07,08,POK,T,NO,CLE
  REAL MX,MY
  EXTERNAL SCALF,FGRID,FPLOT,POINT
  DEFINE FILE 6(90,32,U,I6)
  CALL SCALF(1.5,1.5,0.,0.)
  CALL FGRID(0,-3.5,0.,0.5,14)
  CALL FGRID(1,0.,-3.5,0.5,14)
  CALL FPLOT(-2,1.,1.)
  CALL FPLOT(+2,-1.,1.)
  CALL FPLOT(+2,-1.,-1.)
  CALL FPLOT(+2,1.,-1.)
  CALL FPLOT(+2,1.,1.)
  CALL FPLOT(+2,-1.,-1.)
  CALL FPLOT(-2,-1.,1.)
  CALL FPLOT(+2,1.,-1.)
  N=0
  XI=0.
  YI=0.
  XXI=0.
  YYI=0.
  XYI=0.
  I6=1
  DO 1 J=1,90
    READ(6'I6)UC,JCPSP,P,GAMAD,W,G,PDS3,PDS2,PDS1,LL,LPR,PROC,M1,M2,A,
1PHI,C,E1,E2,E3,021,03,04,05,06,07,08,POK,T,NO,CLE
    X=LL/100.
    Y=(LPR/100)/100.
    IF(CLE-999)2,5,2
2  IF(X)1,1,3
3  IF(Y)1,1,4
4  XI=XI+X
    YI=YI+Y
    N=N+1
    XXI=XXI+X**2
    YYI=YYI+Y**2
    XYI=XYI+X*Y
    WRITE(3,100)X,Y,CLE
1  CONTINUE
5  MX=XI/N
    MY=YI/N
    COV=XYI/N-MX*MY
    VX=XXI/N-MX**2
    VY=YYI/N-MY**2
    SX=SQRT(VX)
    SY=SQRT(VY)
    RO=COV/SX/SY+0.005
    WRITE(3,101)N,MX,MY,SX,SY,COV,RO
    CALL FPLOT(-2,1.,RO)

```

```

X1=1.
Y1=RO
DO 6 J=1,40
X1=X1-0.05
Y1=RO*X1+SQRT((RO**2-1)*(X1**2-1))
6 CALL FPLLOT(2,X1,Y1)
X1=-1.
Y1=-RO
DO 7 J=1,40
X1=X1+0.05
Y1=RO*X1-SQRT((RO**2-1)*(X1**2-1))
7 CALL FPLLOT(2,X1,Y1)
CALL FPLLOT(+1,1,RO)
CALL FPLLOT(-2,3.,3*RO)
CALL FPLLOT(2,-3.,-3*RO)
CALL FPLLOT( 1,3*RO,3.)
CALL FPLLOT( 2,-3*RO,-3.)
100 FORMAT(10X,4HX = ,F5.2,10X,4HY = ,F5.2,10X,6HCLE = ,I3)
101 FORMAT(1H0,4HN = ,I3,9X,5HMX = ,F5.3,3X,5HMY = ,F5.3,9X,5HSX = ,F5
1.3,3X,5HSY = ,F5.3,3X,6HCOV = ,F6.3,9X,5HRO = ,F5.2)
I6=1
DO 8 J=1,90
READ(6'I6)UC,JCPS,P,GAMAD,W,G,PDS3,PDS2,PDS1,LL,LPR,PROC,M1,M2,A,
1PHI,C,E1,E2,E3,O21,O3,O4,O5,O6,O7,O8,POK,T,NO,CLE
X=LL/100.
Y=(LPR/100)/100.
IF(CLE-999)9,12,9
9 IF(X)8,8,10
10 IF(Y)8,8,11
11 TETA1=(X-MX)/SX
TETA2=(Y-MY)/SY
CALL FPLLOT(+1,TETA1,TETA2)
CALL FPLLOT(-2,TETA1,TETA2)
CALL POINT(0)
8 CONTINUE
12 CALL EXIT
END
// XEQ 01

*FILES(6,C0)

```

```

// JOB
// FOR
*IOCS(CARD,DISK,PLOTTER,1132PRINTER)
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
  INTEGER SO,REP1,REP2,GAMAD,W,G,PR
  REAL M(13),LX,LY,LL,MX
  DIMENSION D(13),X(13),Y(13),NNN(12),YY(13)
  DIMENSION ITABL(14),MTABL(21)
  DATAYY/100.,90.,80.,70.,60.,50.,40.,30.,20.,10.,5.,0.,0./
  DEFINE FILE 2(26,40,U,I2)
  READ(2,101)LX,LY
  READ(2,103) ITABL
  DO 33 L = 1,14
    I2 = ITABL(L)
  DO 50 I = 1,13
50 Y(I) = YY(I)
  PAUSE
  CALL DATSW(5,JJ)
  IF(JJ-1) 60,60,61
61 READ(2,I2) SO,MA,REP1,REP2,NC,NPPR,GAMAD,W,G,M1,M2,M3,M4,M5,M6,M7,
  *M8,M9,MTABL,INT
  PR = NPPR-NPPR/100*100
  F = LY/100./2.538
  E = LX/4./2.538
  CALL SCALF(E,F,0.,0.)
  CALL FGRID(1, 0., 0.,10.,10)
  CALL FGRID(0, 0.,0.,1.,7)
  CALL FCHAR(1.5,110.,0.2,0.2,0.)
  I3 = I2-1
  WRITE(7,100)SO,MA,REP1,REP2,I3

C
C
C      ADAPTATION DES DONNEES
C
  NNN(1) = M1/10
  NNN(2) = (M1-M1/10*10)*100+M2/100
  NNN(3) = (M2-M2/100*100)*10+M3/1000
  NNN(4) = M3-M3/1000*1000
  NNN(5) = M4/10
  NNN(6) = (M4-M4/10*10)*100+M5/100
  NNN(7) = (M5-M5/100*100)*10+M6/1000
  NNN(8) = M6-M6/1000*1000
  NNN(9) = M7/10
  NNN(10) = (M7-M7/10*10)*100+M8/100
  NNN(11) = (M8-M8/100*100)*10+M9/1000
  NNN(12) = M9-M9/1000*1000
  D30 = (NNN( 8)-NNN( 8)/100*100)/10.*10.**((NNN( 8)/100+1)/10
  D10 = (NNN(10)-NNN(10)/100*100)/10.*10.**((NNN(10)/100+1)/10
  D60 = (NNN( 5)-NNN( 5)/100*100)/10.*10.**((NNN( 5)/100+1)/10
  DO 1 I = 1,12
  X(I) = NNN(I)/100+ALOG((NNN(I)-NNN(I)/100*100)/10.)/2.3026
1 X(I) = 5.-X(I)
  N = 12
  IF(INT)70,70,71
71 XXXX = 5.-INT/100-ALOG((INT-INT/100*100)/10.)/2.3026
  DO 81 I = 1,12
  IF(XXXX -X(I+1))80,80,81
81 CONTINUE
80 N = 13
  MM = 12-I
  DO 72 J = 1,MM

```

```

      II = 14-J
      X(II) = X(II-1)
72  Y(II) = Y(II-1)
      X(I+1) = XXXX
      Y(I+1) = (Y(I+2)-Y(I))/2+Y(I)
70  CONTINUE
      IF (X(N)-X(N-1))30,31,32
30  WRITE(3,301)
      GOTO 60
31  X(N) = X(N-1)+(X(N-1)-X(N-2))*2
32  X(N) = X(N)

```

CALCUL DE LA FONCTION SPLINE

```

NN = N-2
DO 3 J = 1,NN
  I = N-J
  A = X(I+1)-X(I)
  B = X(I)-X(I-1)
  C = Y(I+1)-Y(I)
  E = Y(I)-Y(I-1)
  IF (N-1-I) 4,4,5
4 D(I) = (X(I+1)-X(I-1))/3
  M(I) = C/A-E/B
  GOTO 3
5 D(I) = (12*D(I+1)*(X(I+1)-X(I-1))-A**2)/36/D(I+1)
  M(I) = C/A-E/B-A*M(I+1)/6/D(I+1)
3 CONTINUE
  M(1) = 0.
  M(N) = 0.
  NN = N-1
  DO 6 I = 2,NN
    IF (I-2) 7,7,8
7 M(I) = M(I)/D(I)
    GOTO 6
8 M(I) = (6*M(I)-(X(I)-X(I-1))*M(I-1))/6/D(I)
6 CONTINUE

```

TRACES

COURBE GRANULOMETRIQUE (REPARTITION)

```

PAS = 0.01
CALL FPLOT(-2,X(1),Y(1))
K = 2
T = X(1)
DO 9 I = 1,600
  T = T+PAS
  A = X(K)-X(K-1)
  B = X(K)-T
  C = T-X(K-1)
  SLP = (M(K-1)*B**3+M(K)*C**3+(6*Y(K)-M(K)*A*A)*C+(6*Y(K-1)-M(K-1)*
1A*A)*B)/6/A
  CALL FPLOT(-2,T,SLP)
  IF(T+PAS-X(K))17,18,18
17 GOTO 9
18 CALL FPLOT(-2,X(K),Y(K))
  T = X(K)
  XF = 4.-ALOG(7.4)/2.3026
  IF(X(K)-XF)19,20,21
20 FILER = Y(K)
  GOTO19
21 IF(X(K-1)-XF)24,19,19

```

```

24 FILER = (M(K-1)*(X(K)-XF)**3+M(K)*(XF-X(K-1))**3+(6*Y(K)-M(K)*A*A)
    *(XF-X(K-1)))+(6*Y(K-1)-M(K-1)*A*A)*(X(K)-XF))/6/A
19 K = K+1
    IF(K-N)22,22,23
22 GOTO 9
    9 CONTINUE
23 CALL FPLOTT(1,X(1),0.)

```

C COURBE DE DISTRIBUTION

```

PAUSE
CALL FPLOT(-2,X(1),0.)
CALL FPLT(-2,X(1),-((Y(2)-Y(1))/(X(2)-X(1))-(X(2)-X(1))*M(2)/6)/5)
K = 2
T = X(1)
PAS = 0.01
DO 10 J = 1,600
T = T+PAS
LL = X(K)-X(K-1)
DIST = M(K-1)/2/LL*(X(K)-T)**2-M(K)/2/LL*(T-X(K-1))**2-(Y(K)-Y(K-1)
F))/LL+LL/6*(M(K)-M(K-1))
CALL FPLT(-2,T,DIST/2.5)
IF(T+PAS-X(K))11,12,12
11 GOTO 10
12 T = X(K)
DIST = -M(K)/2*LL-(Y(K)-Y(K-1))/LL+LL/6*(M(K)-M(K-1))
CALL FPLT(-2,T,DIST/2.5)
K = K+1
IF(K-N)13,13,14
13 GOTO 10
10 CONTINUE
14 CALL FPLT(-1,X( N),0.)

```

CALCUL DES PARAMETRES

```

EX = 0.
DO 15 I = 2,N
  MX = 0.5*(X(I)-X(I-1))*3/12*(M(I)+M(I-1))+(Y(I)-Y(I-1))*(X(I)+X(I
  *-1))*0.5
15 EX = EX+MX
  EX = -EX/100
  SIGX2 = 0.
  DO 16 I = 2,N
    SX2 = 2*(X(I)-X(I-1))*4/45*(M(I)-M(I-1))+(X(I)-X(I-1))*3/12*(M(I
    *-1)*X(I)+M(I)*X(I-1))+(Y(I)-Y(I-1))/3*(X(I)**2+X(I)*X(I-1)+X(I-1)*
    **2)
16 SIGX2 = SIGX2+SX2
  VARX = -SIGX2/100-EX**2
  ECARX = SQRT(VARX)
  CC = D30**2/D10/D60
  CU = D60/D10
  CALL FCHAR(0.8,-15.,0.1,0.1,0.)
  WRITE(7,102)EX,ECARX,CC,CU,FILER
  WRITE(3,102)EX,ECARX,CC,CU,FILER
33 CONTINUE
60 CALL EXIT
100 FORMAT(A2,2X,A2,2X,2A2,3X,I2)
101 FORMAT(2F4.1)
102 FORMAT(1X,'EX = 'F6.2,3X,'ECART TYPE = 'F6.2,3X,'CC = 'F5.3,3X,'U
  F= 'F8.2,3X,'( FILLER = 'F5.2)
103 FORMAT(14I2)
301 FORMAT(1X,'ERREUR')
END

```

```
// XEQ 1
*FILES(2,LABOR)
```

Programme 4

```

// JOB
// FOR
*IOCS(CARD,DISK,PLOTTER,1132PRINTER)
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
  INTEGER SO,REP1,REP2,GAMAD,W,G,PR,P
  REAL M(9),LX,LY
  DIMENSION X(9),Y(9),NY(9),D(6) ,MM(10),MN(7)
  DATA X/.1,.5,1.,2.,5.,10.,.1,5.,10./
  DEFINE FILE 1(47,40,U,I1)
  READ(2,101)LX,LY
101 FORMAT(2F4.1)
  F = LY/2.538
  E = LX/2./2.538
  CALL SCALF(E,F,0.,-1.)
  CALL FGRID(1,0.,-1.,1.,3)
  CALL FGRID(0,-4.,-1.,1.,10)
  PAUSE
  CALL FPLOT(-2,6.,0.)
  CALL FPLOT(-1,-4.,0.)
  CALL FPLOT(-2,-4.,1.)
  CALL FPLOT(-1,6.,1.)
  DO 1 I = 1,9
1  X(I) = 2+ALOG(X(I))/2.3026
  I1 = 1
  DO 30 L = 1,47
  PAUSE
  CALL DATSW(5,JJ)
  IF(JJ-1) 50,50,51
51 READ(1'I1) SO,MA,REP1,REP2,NC,NPPR,GAMAD,W,G,MM,MAL,MAP,MN,NY
  PR = NPPR-NPPR/100*100
  P = NY(1)/10000
  NY(1) = NY(1)-NY(1)/10000*10000
  IF(G) 13,13,14
13 G = 270
14 G = G
  NYG3 = NY(9)
  NYG1 = NY(7)
  NY(7) = NYG3
  NY(9) = NYG1
  DO 15 I = 1,9
  IF(P-1)10,11,12
10 Y(I) = NY(I)/1000.
  GOTO 15
11 Y(I) = G/100./GAMAD*100.*(1-NY(I)/1000.)-1
  GOTO 15
12 Y(I) = G/100.*NY(I)/1000.
15 CONTINUE
  WL = (MAL-MAL/1000*1000)/100.
  WP = MAP/100/100.
  DO 2 I = 1,9
2  Y(I) = (Y(I)/G*100.-WP)/(WL-WP)
  N = 6
  NN = N-2
  DO 3 J = 1,NN
  I = N-J
  A = X(I+1)-X(I)
  B = X(I)-X(I-1)

```

XLI

```

      C = Y(I+1)-Y(I)
      E = Y(I)-Y(I-1)
      IF (N-1-I) 4,4,5
4    D(I) = (X(I+1)-X(I-1))/3
      M(I) = C/A-E/B
      GOTO 3
5    D(I) = (12*D(I+1)*(X(I+1)-X(I-1))-A**2)/36/D(I+1)
      M(I) = C/A-E/B-A*M(I+1)/6/D(I+1)
3    CONTINUE
      M(1) = 0.
      M(N) = 0.
      NN = N-1
      DO 6 I = 2,NN
      IF (I-2) 7,7,8
7    M(I) = M(I)/D(I)
      GOTO 6
8    M(I) = (6*M(I)-(X(I)-X(I-1))*M(I-1))/6/D(I)
6    CONTINUE
      M(8) = ((Y(9)-Y(8))/(X(9)-X(8))-(Y(8)-Y(7))/(X(8)-X(7)))/(X(9)-X(7)
F))*3
      M(7) = 0.
      M(9) = 0.
      T6 = (Y(6)-Y(5))/(X(6)-X(5))+(X(6)-X(5))/6*M(5)
      N = 6
      PAS = .002
      CALL FPLLOT( 1,X(1),Y(1))
      K = 2
      T = X(1)
      DO 9 I = 1,3000
      T = T+PAS
      A = X(K)-X(K-1)
      B = X(K)-T
      C = T-X(K-1)
      SLP = (M(K-1)*B**3+M(K)*C**3+(6*Y(K)-M(K)*A*A)*C+(6*Y(K-1)-M(K-1)*
1A*A)*B)/6/A
      CALL FPLLOT(-2,T,SLP)
      IF(T+PAS-X(K))17,18,18
17 GOTO 9
18 CALL FPLLOT(-2,X(K),Y(K))
      IF(K-6)20,16,20
16 K = K+1
      CALL FPLLOT(1,X(7),Y(7))
20 T = X(K)
      K = K+1
      IF(K-N)22,22,23
22 GOTO 9
9    CONTINUE
23 XL = X(6) -(Y(6)-1.)/T6
      CALL FPLLOT(-2,X(6)-Y(6)/T6,0.)
      IF(XL+4.)61,62,62
61 CALL FPLLOT(-1,-4.,Y(6)-T6*(X(6)+4.))
      GO TO 30
62 CALL FPLLOT(-1,XL,1.)
30 CONTINUE
50  CALL EXIT
      END
// XEQ 1
*FILES(1,CENTR)

```

Programmes de Cartographie

- I Constitution des fichiers SO
 SUR
 TGSUR
 PRO
 APRO
 TGP
 TGPRO
 Remplissage de SO

- 2 POSON positionnement des sondages de tout le fichier
 affectation de leur numéro de fiche

- 3 RSCUR tracé du réseau curviligne de surface
 remplissage de SUR et TGSUR
 numérotation des lignes et sondages par lignes

- 4 COCUR tracé des logs de sondages par lignes
 indication de la nature des sols

- 5 NUCOU numérotation des couches
 remplissage de PRO et APRO

- 6 TOCOU tracé du toit des couches
 remplissage de TGP et TGPRO

Programme 5

```

// JOB
// FOR
*IOCS (CARD,1132 PRINTER,DISK,PLOTTER,KEYBOARD,TYPEWRITER)
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
  INTEGER PR(9),D1,D2,D3,D4,D5,D6,D7,D8,D(9)
  DIMENSION XPR(9),S(100)
  DEFINE FILE1(250,26,U,I1),2(1,200,U,I2)
  I2 = 1
  READ(2,I2)S
  WRITE(1,201)
  WRITE (1,202)
  READ(6,200)LL,EE,FF
  DEC = 28/FF
  E = EE/2.538
  F = FF/2.538
  PI = 3.14159
  CALL SCALF(F,E,0.,0.)
  L = 0
  ZO = 217.
  M = 0
9 K = 0
  CALL FGRID(1,ZO-217,0.,0.05,IFIX(LL/EE/0.05))
  CALL FCHAR (ZO-217,LL/EE+0.01*70/EE,0.2,0.2,PI/2)
  WRITE (7,103)L
  CALL FPLOT(-2,ZO-217,0.)
13 U = 99.9+L*DEC
14 READ (2,100)I1
  IF (I1-777)5,6,7
  7 IF (I1-888)2,8,8
  8 ZO = ZO+DEC
  L = L+1
  PAUSE
  GO TO 9
5 READ(1,I1)J,M1,M2,M3,M4,M5,N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,D1,D2,D3,D4,D5,
+D6,D7,D8
  Z = M4+M5/1000/10.
  XPR(1) =ZO-Z
  PR(2) = N1/10 + L*IFIX(DEC*10)
  IF(PR(2)/10.-U)11,11,12
11 K = K+1
  M = 0
12 PR(3) = N2/10 + L*IFIX(DEC*10)
  PR(4) = N3/10 + L*IFIX(DEC*10)
  PR(5) = N4/10 + L*IFIX(DEC*10)
  PR(6) = N5/10 + L*IFIX(DEC*10)
  PR(7) = N6/10 + L*IFIX(DEC*10)
  PR(8) = N7/10 + L*IFIX(DEC*10)
  PR(9) = N8/10 + L*IFIX(DEC*10)
  D(2) = D1
  D(3) = D2
  D(4) = D3
  D(5) = D4
  D(6) = D5
  D(7) = D6

```

```

D(8) = D7
D(9) = D8
N = K+10*L
CALL FPLOT(-2,XPR(1),S(N))
CALL POINT(0)
CALL FCHAR (XPR(1)-1.5*2./3./FF,S(N)-0.004*70/EE,0.1,0.1,PI/2)
WRITE (7,104)N
CALL FPLOT(-2,XPR(1),S(N))
104 FORMAT(I2)
DO 1 I = 2,9
  IF (PR(I)-L*IFIX(DEC*10)) 2,3,4
3 M = 0
  CALL FPLOT(-1,XPR(I-1),S(N) )
  GO TO 13
4 XPR(I) = XPR(1) + PR(I)/10. -L*DEC
  II = 8*M+I-1
  IF (II-10)10,15,15
15 II = II-8
10 CALL FPLOT(-2,XPR(I),S(N))
  CALL POINT(0)
  CALL FCHAR((XPR(I)+XPR(II))/2,S(N)+0.002*70/EE,0.1,0.1,PI/2)
  WRITE(7,102)D(I)
1 CALL FPLOT(-2,XPR(I),S(N) )
  CALL FPLOT(-1,XPR(I) ,S(N) )
  U = PR(9)/10.
  M = 1
  GOTO 14
2 WRITE(3,101)
6 CALL EXIT
100 FORMAT (I3)
101 FORMAT('ERREUR')
102 FORMAT (1A2)
103 FORMAT ('L = ',I2)
200 FORMAT(I2,2F6.2)
201 FORMAT('ENTRER LA LONGUEUR EN CM DE LA REPRESENTATION D UNE LIGNE
*, LL EN I2 , L EQUIVALENCE EN CM D 1KM EN SURFACE ET D 1M EN ')
202 FORMAT('PROFONDEUR , EE ET FF EN 2F6.2')
END
// DUP
*STORE WS UA COCUR
// XEQ COCUR 2
*FILES(1,SO)
*FILES(2,SUR)

```

BIBLIOGRAPHIE

L'essentiel de la bibliographie se trouve dans la 4ème Partie "Recherches analogues effectuées", page 199 où le lecteur voudra bien se reporter.

Je ne donne ici que quelques références d'auteurs que j'ai consulté principalement pour le calcul de Probabilités statistiques.

- A. LIORZOU, "Initiation pratique à la statistique", Eyrolles Gauthier-Villars, Paris 1970.
- M. GIRSCHIG, "Cours d'analyse statistique, Ecole centrale des arts et manufacture", Paris 1968.
- J. HEURTAUX, "Note élémentaire sur les méthodes statistiques", Grenoble 1960, non publié.
- DUMAS, "Application des méthodes statistiques à l'interprétation des épreuves sur prélèvements" , Travaux et mémoires de la Société Française de Mécanique, Paris 59.
- S.A. COONS, "Surfaces for computer - Aided design of space figures", M.I.T. Janvier 1964.
- C. CARASSO, "Méthodes numériques de calcul des fonctions "splines", Thèse de Spécialité, Grenoble, Mars 1966.
- L'Informatique Géologique - Bulletin du BRGM - Section IV - n°3 - 1968.
- Proceeding of the Seminat on Soils Mechanics and Foundation Engineering, LODZ, Juin 64 - p.28.
- T. SORENSEN and HANSEN, "Pile driving formulae and investigation based on dimensional consideration and statistics analys" - 4° conf. IMSFE, Londres 57.

- J.M. GRESILLON, "Etude des fondations profondes en milieu pulvérulent", Thèse Docteur-Ingénieur, Grenoble, Septembre 70.
- J. VERDEYEN, V. ROISIN, J. NUYENS, "La mécanique des sols", Paris 1968.
- Dossiers d'essais de l'Institut de Mécanique de Grenoble - Section de Mécanique des sols.
- Archives de SOCOTEC - Grenoble.

